۱

$x \geq ۲$ یا $x \leq ۲$

$$y = (x-۲)^۲ - ۴ \Rightarrow (x-۲)^۲ = y+۴$$
$$\Rightarrow x-۲ = \pm\sqrt{y+۴} \Rightarrow x = ۲ \pm \sqrt{y+۴} \Rightarrow f^{-۱}(x) = ۲ \pm \sqrt{x+۴}$$

پاسخ سؤال ۲

۲ درست

۳

الف اگر $x \geq ۰$ فرض شود $f(x) = x$ و وارون آن $f^{-۱}(x) = x$ است.
اگر $x \leq ۰$ فرض شود $f(x) = -x$ و وارون آن $f^{-۱}(x) = -x$ است.

ب اگر $x \geq ۰$ فرض شود:

$$g(x) = y = -x^۲ \Rightarrow x^۲ = -y \Rightarrow |x| = \sqrt{-y}$$
$$\xrightarrow{x\geq ۰} x = \sqrt{-y} \Rightarrow g^{-۱}(x) = \sqrt{-x} \quad ; x \leq ۰$$

اگر $x \leq ۰$ فرض شود:

$$g(x) = y = -x^۲ \Rightarrow x^۲ = -y \Rightarrow |x| = \sqrt{-y}$$
$$\xrightarrow{x\leq ۰} -x = \sqrt{-y} \Rightarrow g^{-۱}(x) = -\sqrt{-x} \quad ; x \leq ۰$$

۴ برای اینکه بتوانیم x را برحسب y بیابیم، ابتدا طرف دوم را در مزدوج ضرب و تقسیم می‌کنیم؛ یعنی:

$$y = (x+\sqrt{x^۲+۳})\frac{(x-\sqrt{x^۲+۳})}{(x-\sqrt{x^۲+۳})} \Rightarrow y = \frac{x^۲-x^۲-۳}{x-\sqrt{x^۲+۳}} \Rightarrow y = \frac{-۳}{x-\sqrt{x^۲+۳}}$$
$$\Rightarrow \frac{y}{-۳} = \frac{۱}{x-\sqrt{x^۲+۳}} \Rightarrow \frac{-۳}{y} = x - \sqrt{x^۲+۳}$$

حال رابطهٔ فوق را با ضابطهٔ تابع در یک دستگاه حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} -\dfrac{۳}{y} = x - \sqrt{x^۲+۳} \\ y = x + \sqrt{x^۲+۳} \end{cases} \Rightarrow y - \frac{۳}{y} = ۲x \Rightarrow x = \frac{y}{۲} - \frac{۳}{۲y}$$

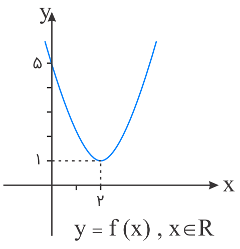
حال جای x و y را عوض می‌کنیم، یعنی:

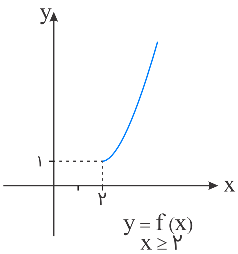
$$y = f^{-۱}(x) = \frac{x}{۲} - \frac{۳}{۲x}$$

۵ در سهمی $y = x^۲ - ۴x + ۵$ کافی است دامنه را از رأس به بعد در نظر بگیریم.

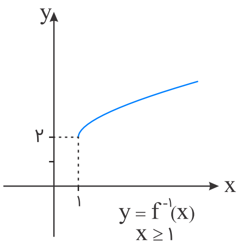
$$y = x^۲ - ۴x + ۴ + ۱ \Rightarrow y - ۱ = (x - ۲)^۲ \Rightarrow \sqrt{y - ۱} = \sqrt{(x - ۲)^۲}$$
$$\Rightarrow \sqrt{y - ۱} = |x - ۲| \xrightarrow{x \geq ۲} \sqrt{y - ۱} = x - ۲$$
$$\Rightarrow x = ۲ + \sqrt{y - ۱} \Rightarrow f^{-۱}(x) = ۲ + \sqrt{x - ۱}$$

اما دامنهٔ $f^{-۱}(x)$ همان برد $f(x)$ است. نمودار f را ببینید.





ملاحظه می‌کنید که برد تابع $f(x)$، $x \geq ۱$ و دامنهٔ آن $[۲, +\infty)$ است. حال نمودار تابع $f^{-۱}(x)$ را رسم می‌کنیم:



همان‌طور که ملاحظه می‌کنید برد تابع $f^{-۱}(x)$، $[۲, +\infty)$ و دامنهٔ آن $[۱, +\infty)$ می‌باشد.

۶

$$y = -x^۲ - ۲ \xrightarrow{x \geq ۰} x = \sqrt{-y - ۲} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt{-x - ۲}$$
$$D_{f^{-۱}} = (-\infty\, , -۲]$$

۷

$$(fog)(x) = \frac{۱}{\frac{۱}{x-۳}} + ۳ = x - ۳ + ۳ = x \Rightarrow (fog)(x) = x$$

روش اول: این دو تابع وارون یکدیگرند. زیرا:

$$(gof)(x) = \frac{۱}{(\frac{۱}{x} + ۳) - ۳} = \frac{۱}{\frac{۱}{x}} = x \Rightarrow (gof)(x) = x$$

روش دوم: این دو تابع وارون یکدیگرند. زیرا:

$f(x_۱) = f(x_۲) \Rightarrow x_۱ = x_۲ \Rightarrow \frac{۱}{x_۱} + ۳ = \frac{۱}{x_۲} + ۳ \Rightarrow \frac{۱}{x_۱} = \frac{۱}{x_۲} \Rightarrow x_۱ = x_۲ \Rightarrow$ تابع یک به یک است

$$y = \frac{۱}{x} + ۳ \Rightarrow \frac{۱}{x} = y - ۳ \Rightarrow x = \frac{۱}{y-۳} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۱}{x-۳} = g(x)$$

۸

الف

نکته:

$$\begin{cases} ١)\ f^{-1}(f(x)) = x \quad ,x \in D_f \\ ٢)\ f\left(f^{-1}(x)\right) = x \quad ,x \in D_{f^{-1}} \end{cases}$$

نکتهٔ ۱ را به کمک D_{fog} می‌توان اثبات کرد:

$$D_{f^{-1}of} = \left\{x \in D_f | f(x) \in D_{f^{-1}}\right\} = \left\{ x \in D_f | \underbrace{f(x) \in R_f}_{\text{همواره برقرار است}} \right\} = D_f$$

در این سؤال:

$$y = f^{-1}(f(x)) = x\ ,x \in D_f\ ,y = f\left(f^{-1}(x)\right) = x\ ,x \in D_{f^{-1}} = R_f$$

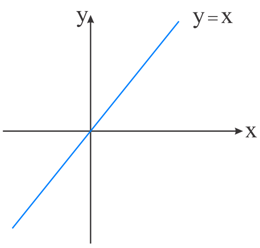
پس باید دامنه و برد تابع f را تعیین کنیم:

$$f(x) = x + \sqrt{x^٢ + ١} \Rightarrow x^٢ + ١ \geq ٠ \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

برای تعیین برد می‌نویسیم:

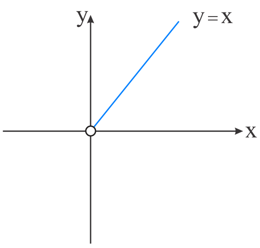
$$\sqrt{x^٢} = |x| \Rightarrow \sqrt{x^٢ + ١} > |x|\ , |x| \geq -x \Rightarrow \sqrt{x^٢ + ١} > -x \Rightarrow x + \sqrt{x^٢ + ١} > ٠$$
$$\Rightarrow y > ٠ \Rightarrow R_f = (٠, +\infty)$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad ,x \in \mathbb{R}$$



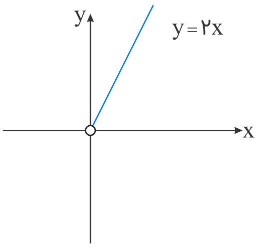
ب

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x \quad ,x \in (٠, +\infty)$$



پ

$$y = f\left(f^{-1}(x)\right) + f^{-1}\left(f(x)\right) = x + x = 2x \ , x \in (0, +\infty)$$



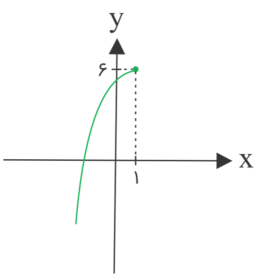
دقت کنید دامنهٔ مجموع، اشتراک دو دامنه است.

۹

ضابطهٔ f را به فرم مربع کامل می‌نویسیم:

$$f(x) = -x^2 + 2x + 5 = -(x^2 - 2x + 1 - 1) + 5 = -(x-1)^2 + 6$$

سهمی بالا با دامنهٔ $x \leq 1$ را رسم می‌کنیم:



چون برد این تابع بازهٔ $(-\infty, 6]$ شد، پس دامنهٔ f^{-1} هم همین بازه است.

حالا ضابطهٔ وارون f را حساب می‌کنیم:

$$y = -(x-1)^2 + 6 \Rightarrow 6 - y = (x-1)^2 \Rightarrow \sqrt{6-y} = |x-1| \xrightarrow{x \leq 1} \sqrt{6-y} = -x + 1 \Rightarrow x = 1 - \sqrt{6-y}$$

جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$x = 1 - \sqrt{6-y} \Rightarrow y = 1 - \sqrt{6-x}$$

پس:

$$f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{6-x} \ , \ D_{f^{-1}} = (-\infty \, , 6]$$

۱۰

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 1 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 7 = (x+2)^3 - 7$$
$$\Rightarrow y + 7 = (x+2)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{y+7} = x + 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y+7} - 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+7} - 2$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = -2 \end{cases}$$

۱۱

الف چون $(۲,۴) \in f$ آنگاه $(۴,۲) \in f^{-۱}$ است.

$$\left(f^{-۱}og\right)(۱) = f^{-۱}\left(g\left(۱\right)\right) = f^{-۱}\left(۴\right) = ۲$$

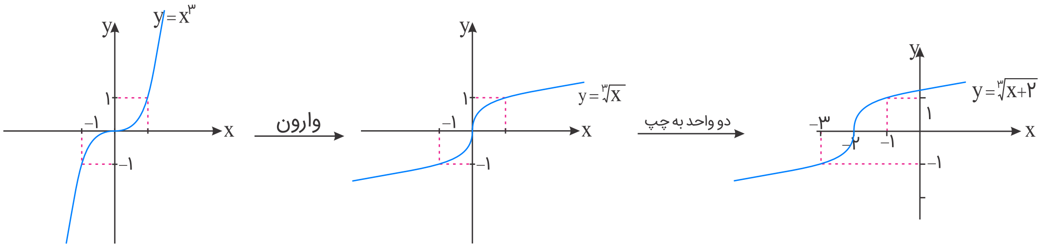
۱۲ برای تعیین ضابطهٔ وارون سعی می‌کنیم x را برحسب y بیابیم؛ یعنی:

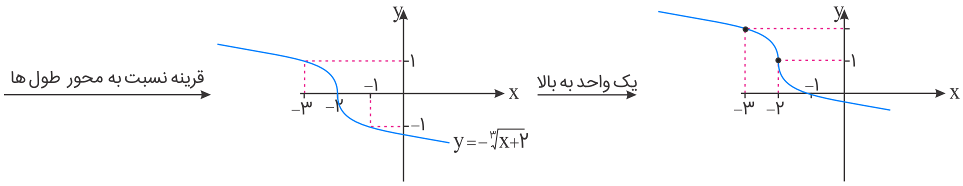
$$y = \begin{cases} \sqrt{x} + ۲ & ; x \geq ۰ \\ ۱ - x^۲ & ; x < ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{x} + ۲ & ; x \geq ۰ \\ y = ۱ - x^۲ & ; x < ۰ \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = y - ۲ & ; x \geq ۰ \\ x^۲ = ۱ - y & ; x < ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (y - ۲)^۲ & ; x \geq ۰ \\ x = -\sqrt{۱ - y} & ; x < ۰ \end{cases}$$

حال جای x و y را عوض می‌کنیم؛ یعنی:

$$\begin{cases} y = (x - ۲)^۲ & ; y \geq ۰ \xrightarrow{(x-۲)^۲ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۲} \\ y = -\sqrt{۱ - x} & ; y < ۰ \xrightarrow{-\sqrt{۱-x} < ۰ \Rightarrow x < ۱} \end{cases} f^{-۱}(x) = y = \begin{cases} (x - ۲)^۲ & ; x \geq ۲ \\ -\sqrt{۱ - x} & ; x < ۱ \end{cases}$$

۱۳ می‌دانیم $y = \sqrt[۳]{x}$ وارون تابع $y = x^۳$ است. بنابراین مراحل زیر را انجام می‌دهیم:





پاسخ سؤال ۱۴

۱۴ درست

۱۵ برای پیدا کردن ضابطهٔ وارون تابع لازم است x برحسب y تعیین شود، بنابراین:

$$y = \frac{۳ \times ۳^x - ۲}{۳^x + ۱} \Rightarrow ۳ \times ۳^x - ۲ = y \times ۳^x + y \Rightarrow ۳ \times ۳^x - y \times ۳^x = y + ۲$$
$$\Rightarrow ۳^x(۳ - y) = y + ۲ \Rightarrow ۳^x = \frac{y + ۲}{۳ - y} \Rightarrow x = \log_۳^{\frac{y+۲}{۳-y}}$$

حال جای x و y را عوض می‌کنیم، یعنی:

$$y = f^{-۱}(x) = \log_۳^{\frac{x+۲}{۳-x}}$$

۱۶ باید ثابت کنیم ترکیب دو تابع f و g برابر تابع همانی است، یعنی:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = ۳g(x) - ۴ = ۳(\frac{x+۴}{۳}) - ۴ = x \quad (x \in D_g)$$

همچنین:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)+۴}{۳} = \frac{۳x - ۴ + ۴}{۳} = x \quad (x \in D_f)$$

بنابراین دو تابع f و g وارون یکدیگرند.

پاسخ سؤال ۱۷

۱۷ درست است.

پاسخ سؤال ۱۸

۱۸ دوم

۱۹ الف

$$۱)\ (gof)(-۱) = g(۱) = -۵$$

$$۲)\ (g^{-۱}of^{-۱})(۲) = g^{-۱}(۰) = -۴$$