۱ چون نقطهٔ شروع ۲ واحد بالا رفته، پس یک انتقال عمودی ۲ واحدی صورت گرفته است. حال اگر فرض کنیم نمودار به‌اندازهٔ a واحد به راست انتقال پیدا کرده و سپس با ضریب b، انبساط یا انقباض افقی صورت گرفته، ضابطهٔ تابع به‌صورت زیر خواهد بود:

$$y=\sqrt{x}\xrightarrow[\text{به بالا}]{\text{۲ واحد انتقال}}y=\sqrt{x}+۲\xrightarrow[\text{راست}]{\text{a واحد به}}y=\sqrt{x-a}+۲$$

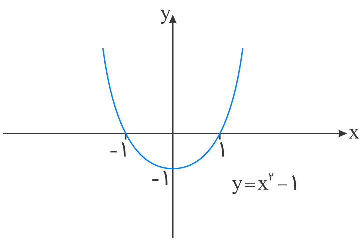
$$\xrightarrow[\text{انبساط یا انقباض افقی}]{\text{با ضریب b}}y=\sqrt{bx-a}+۲=f(x)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f(\frac{۳}{۲})=۲\Rightarrow\sqrt{\frac{۳}{۲}b-a}+۲=۲\\ f(\frac{۱۱}{۲})=۶\Rightarrow\sqrt{\frac{۱۱}{۲}b-a}+۲=۶\end{cases}$$

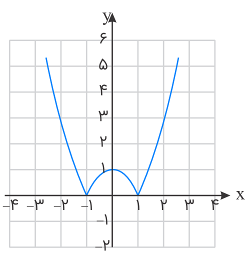
$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{۳}{۲}b-a=۰\\ \frac{۱۱}{۲}b-a=۱۶\end{cases}\xrightarrow{\text{تفریق}}۴b=۱۶\Rightarrow b=۴\Rightarrow a=۶$$

$$\Rightarrow f(x)=\sqrt{۴x-۶}+۲$$

۲ ابتدا نمودار $y=x^۲-۱$ را رسم می‌کنیم.



حال بخشی از نمودار که زیر محور xها قرار دارد را به بالای آن متقارن می‌کنیم تا نمودار $|x^۲-۱|$ رسم شود.



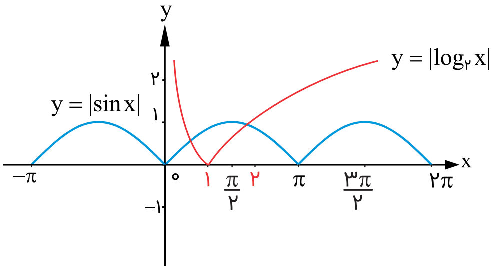
۳ **الف**

$$D_f=(-\infty,۱]\quad,\quad D_g=[۱,+\infty)$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}$$

$$\Rightarrow D_{gof}=\{x\in(-\infty,۱]|\sqrt{۱-x}\in[۱,+\infty)\}\quad\Rightarrow D_{gof}=(-\infty,۰]$$

۴



الف بازه $[۰, ۱]$

ب تعداد ریشه‌ها = ۲ تا

۵

$$D_f = \mathbb{R} - \{۰\} \quad , \quad D_g = [-۲\,,\,۲]$$

$$D_{fog} = \{x \in [-۲\,,\,۲] \mid \sqrt{۴ - x^۲} \neq ۰\} = (-۲\,,\,۲)$$

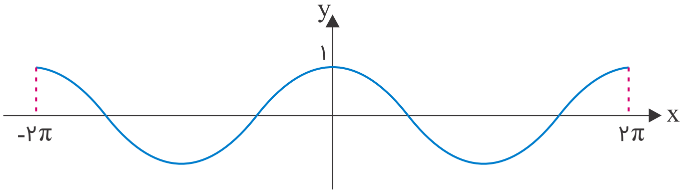
۶ نکته: باتوجه‌به نسبت‌های مثلثاتی، می‌دانیم $\sin(\frac{۳\pi}{۲} - x) = -\cos x$.

پس داریم:

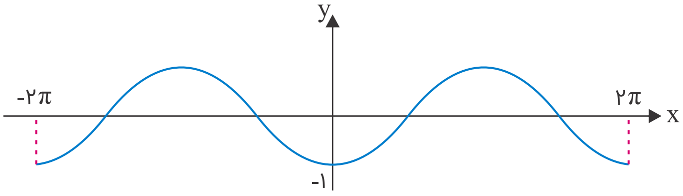
$$f(x) = |-\cos x| + ۱$$

حال به روش انتقال، تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:

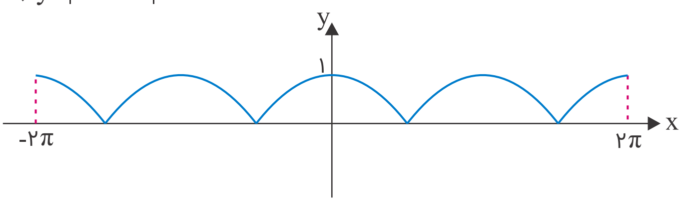
۱) y=cos x



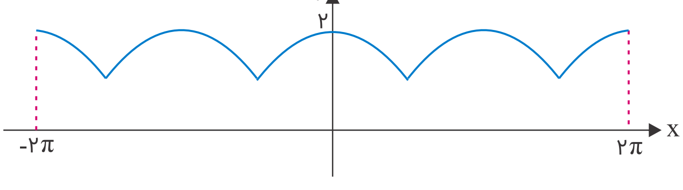
۲) y=-cos x



۳) y=|-cos x|



۴) y=|-cos x|+۱

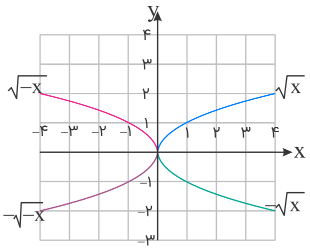


پاسخ سؤال ۷

۷ درست

۸ نمودار تابع $\sqrt{-x}$ از قرینهٔ نمودار تابع $\sqrt{x}$ نسبت به محور yها به دست می‌آید. تابع $-\sqrt{x}$ قرینهٔ تابع $\sqrt{x}$ نسبت به محور xها است. تابع $-\sqrt{-x}$ هم قرینهٔ تابع $\sqrt{-x}$ نسبت به محور xها و یا قرینهٔ $\sqrt{x}$ نسبت به مبدأ مختصات است.

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow D_f = R_f = [۰, +\infty)$$
$$y = \sqrt{-x} \Rightarrow D_f = (-\infty, ۰] \ , \ R_f = [۰, +\infty)$$
$$y = -\sqrt{x} \Rightarrow D_f = [۰, +\infty) \ , \ R_f = (-\infty, ۰]$$
$$y = -\sqrt{-x} \Rightarrow D_f = R_f = (-\infty, ۰]$$



۹

الف $fog(-۱) = f(g(-۱)) = f(-۳) = ۱$

ب $gof(۰) = g(f(۰)) = g(۲) = -۶$

پ $fog(۱) = f(g(۱)) = f(-۵) = ۳$

ت $gof(-۱) = g(f(-۱)) = g(۱) = -۵$

۱۰ فرض می‌کنیم $g(x)=\frac{x-۳}{۵}$ و $h(x)=\frac{x-۱}{x}$؛ پس $D_{fog}=[-۲,۸]$ است و باید D_{foh} را محاسبه کنیم.
می‌دانیم $D_g=\mathbb{R}$ و $D_h=\mathbb{R}-\{۰\}$ و فرض می‌کنیم $D_f=[a,b]$؛ پس داریم:

$$D_{fog}=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|\frac{x-۳}{۵}\in[a,b]\right\}=[-۲,۸]$$

$$\Rightarrow a\le\frac{x-۳}{۵}\le b\Rightarrow ۵a\le x-۳\le ۵b$$

$$\Rightarrow ۵a+۳\le x\le ۵b+۳\Rightarrow\begin{cases}۵b+۳=۸\\ ۵a+۳=-۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=۱\\ a=-۱\end{cases}\Rightarrow D_f=[-۱,۱]$$

$$D_{foh}=\left\{x\in\mathbb{R}-\{۰\}\middle|\frac{x-۱}{x}\in[-۱,۱]\right\}\Rightarrow -۱\le\frac{x-۱}{x}\le ۱\xrightarrow{x\neq ۰}-۱\le ۱-\frac{۱}{x}\le ۱$$

$$\Rightarrow -۲\le\frac{-۱}{x}\le ۰\Rightarrow ۰\le\frac{۱}{x}\le ۲\xrightarrow{x>۰}x\ge\frac{۱}{۲}\Rightarrow D_{foh}=[\frac{۱}{۲},+\infty)$$

۱۱

$$f(-۳)=۱$$

$$g(۲)=۳f(۱-۲\times ۲)=۳\Rightarrow ۳f(-۳)=۳\Rightarrow f(-۳)=۱$$

۱۲ **الف**

$$D_{gof}=\{x\in D_f|f(x)\in D_g\}=\left\{x\in(-\infty,۲]\middle|\sqrt{۴-۲x}\in\mathbb{R}\right\}=(-\infty,۲]$$

ب

$$gof(۲)-\frac{f}{g}(۰)=-۱-(-۲)=۱$$

۱۳ **الف**

$$(fog)(x)=f(g(x))=\begin{cases}f(x^۲-۱) & ;\ x\ge ۰\\ f(۲^x) & ;\ x<۰\end{cases}$$

$$f(x^۲-۱)=\begin{cases}x^۲+۱ & ;\ x^۲-۱\ge ۱\Rightarrow |x|\ge\sqrt{۲}\\ \sqrt{۲-x^۲} & ;\ x^۲-۱<۱\Rightarrow |x|<\sqrt{۲}\end{cases}$$

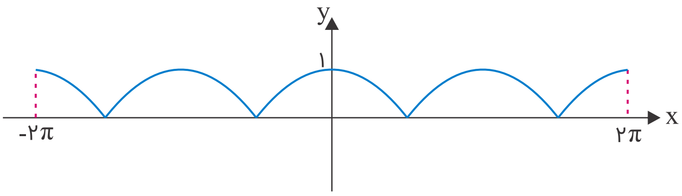
$$f(۲^x)=\begin{cases}۲^x+۲ & ;\ ۲^x\ge ۱\Rightarrow x\ge ۰\\ \sqrt{۱-۲^x} & ;\ ۲^x<۱\Rightarrow x<۰\end{cases}$$

حال باید بین دامنهٔ $f(x^۲-۱)$ و $x\ge ۰$ اشتراک بگیریم؛ اشتراک دامنهٔ ضابطهٔ بالای $f(x^۲-۱)$ با $x\ge ۰$ می‌شود $x\ge\sqrt{۲}$، اشتراک دامنهٔ ضابطهٔ پایین با $x\ge ۰$ می‌شود $۰\le x<\sqrt{۲}$.
اشتراک بین $f(۲^x)$ با $x<۰$ می‌شود $x<۰$، پس می‌نویسیم:

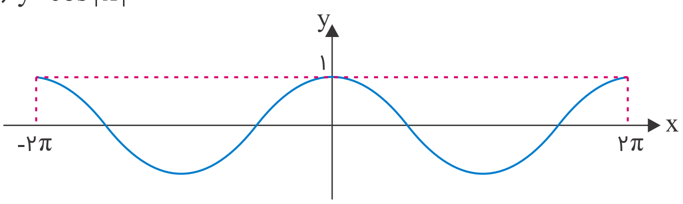
$$f(g(x))=\begin{cases}x^۲+۱ & ;\ x\ge\sqrt{۲}\\ \sqrt{۲-x^۲} & ;\ ۰\le x<\sqrt{۲}\\ \sqrt{۱-۲^x} & ;\ x<۰\end{cases}$$

۱۴ برای رسم تابع $f(x)$، ابتدا تک‌تک توابع را رسم می‌کنیم، سپس این دو تابع را باهم جمع می‌کنیم:

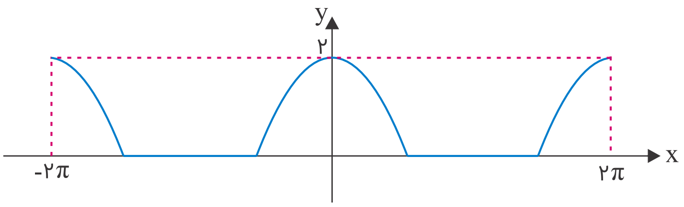
۱) $y=|\cos x|$



۲) $y=\cos|x|$



$\longrightarrow f(x)=|\cos x|+\cos|x|$



پاسخ سؤال ۱۵

۱۵ انقباض افقی

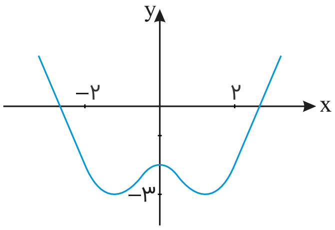
۱۶ الف

$$D_f=\mathbb{R}, D_g=[-۲,+\infty)$$
$$D_{gof}=\{x\in D_f | f(x)\in D_g\}\Rightarrow x-۱\geq -۲\Rightarrow D_{gof}=[-۱,+\infty)$$

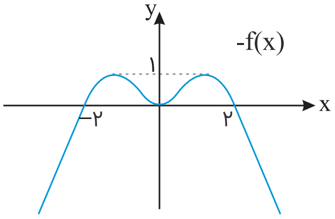
ب

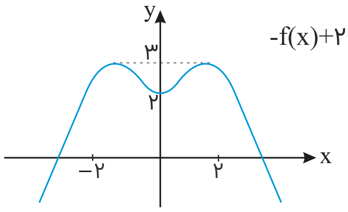
$$g(f(x))=\sqrt{x-۱+۲}=\sqrt{x+۱}$$

۱۷ الف $g(x) = f(x) - ۲$ یعنی تابع $f(x)$ دو واحد به پایین انتقال داده شود.

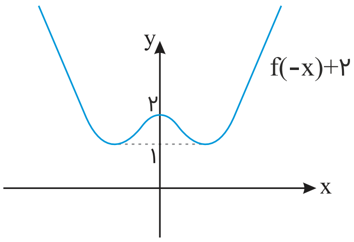


ب $h(x) = -f(x) + ۲$ یعنی نمودار $f(x)$ نسبت به محور xها قرینه و سپس ۲ واحد به بالا انتقال داده شود.

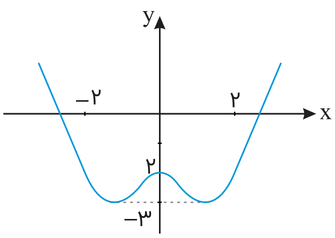




پ $t(x) = f(-x) + ۲$ یعنی نمودار $f(x)$ نسبت به محور yها قرینه و سپس ۲ واحد به بالا انتقال داده شود.



ت $s(x) = f(-x) - ۲$ یعنی نمودار $f(x)$ نسبت به محور yها قرینه و سپس ۲ واحد به پایین انتقال داده شود.



۱۸ الف

$$D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{x \in [-۳, +\infty) | \sqrt{x + ۳} \in \mathbb{R}\} = [-۳, +\infty)$$

ب

$$(gof)(۱) = g(۳) = \sqrt{۶}$$