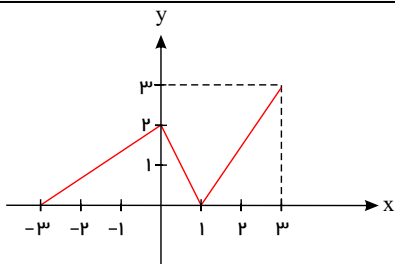


۱- اگر نمودار تابع  $y = f(x)$  به صورت مقابل باشد، نمودار تابع  $y = f(2x - 1)$  را رسم کنید.



۲- در  $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-2x} \leq \left(\frac{1}{81}\right)$  حدود  $x$  را به دست آورید.

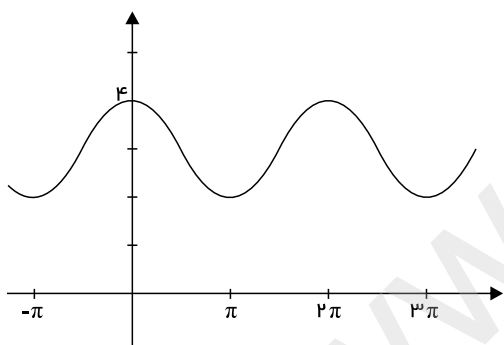
۳- اگر تابع  $f = \{(-1, 4m), (-3, m), (2, 3m + 2)\}$  اکیداً صعودی باشد، حدود  $m$  را بیابید.

۴- در صورتی که دو چندجمله‌ای  $2x^2 - 5x + 4$  و  $x^2 + ax$  در تقسیم بر  $x - 1$  هم باقی‌مانده باشند، آنگاه مقدار  $a$  برابر است با .....

۵- چندجمله‌ای  $x^5 + 1$  را بر حسب عامل  $(x + 1)$  تجزیه کنید.

۶- اگر  $\tan x = 2m - 1$  و  $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  آنگاه حدود  $m$  را بیابید.

۷- نمودار تابع  $f(x) = a + \cos bx$  به صورت زیر است. حاصل  $a + b$  را به دست آورید. ( $b > 0$ )



۸- ضابطه تابعی به فرم  $y = a \cos bx + C$  را بنویسید که دوره تناوب آن ۲ و مقدار ماکزیم آن ۴ و مقدار مینیم آن -۲ باشد.

۹- معادله  $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$  را حل کنید.

۱۰- حدود زیر را محاسبه کنید.

**الف**

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x+1}{\tan x}$$

**ب**

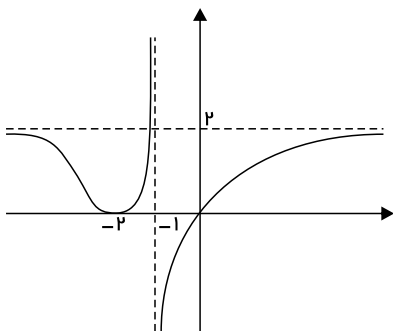
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + 2x^2 + 1}$$

**الف**

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x] - 1}{x - 3}$$

۱۱- حاصل حدهای زیر را بیابید.

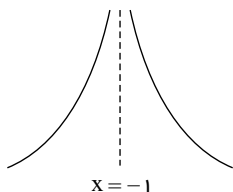
۱۲- با توجه به نمودار تابع  $f$ ، موارد زیر را به دست آورید.



الف)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$

ب)  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \end{cases}$

۱۳- اگر رفتار تابع  $f(x) = \frac{x+3}{x^2+bx+c}$  در اطراف نقطه  $x = -1$  به صورت شکل زیر باشد، مقادیر  $b$ ،  $c$  را به دست آورید.



۱۴- اگر  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a-2)x^3 + 2x^2 + 3}{bx^2 + 1} = 2$  باشد، مقادیر  $a$  و  $b$  را بیابید.

۱۵- حاصل حدهای زیر را بیابید. ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

الف

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{3x+1}{x+2} \right]$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{x+2}{x-1} \right]$$

حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

۱۶- مجانب‌های قائم و افقی منحنی تابع  $\frac{1-x^2}{x^2+x}$  را در صورت وجود بیابید.

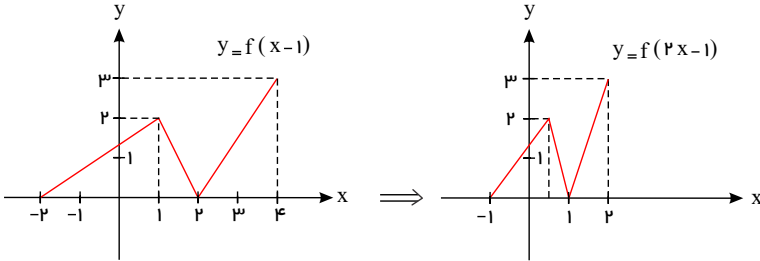
۱۷- اگر خط  $x = -2$  مجانب قائم تابع  $f(x) = \frac{3x-1}{mx+4}$  باشد، مجانب افقی تابع  $f$  را بیابید.

## پاسخنامه تشریحی

- ۱

$$y = f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x-1} y = f(x-1) \xrightarrow{x \rightarrow 2x} y = f(2x-1)$$

با توجه به تبدیلهای فوق برای رسم  $y = f(2x-1)$  نمودار  $y = f(x)$  را ابتدا یک واحد به راست منتقل کرده و سپس طول نقاط را بر ۲ تقسیم می‌کنیم.



- ۲

$$3^{2x-1} \leq 3^{-4}$$

$$2x - 1 \leq -4 \Rightarrow x \leq 3$$

- ۳

$$f = \{(-1, 4m), (-3, m), (2, 3m+2)\}$$

اعضای دامنه را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

$$-3 < -1 < 2 \xrightarrow{f \text{ اکیدا صعودی}} f(-3) < f(-1) < f(2) \Rightarrow m < 4m < 3m+2$$

$$\begin{cases} m < 4m \Rightarrow 3m > 0 \Rightarrow m > 0 & (1) \\ 4m < 3m+2 \Rightarrow m < 2 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow 0 < m < 2$$

۴ - ریشهٔ مقسوم‌علیه یعنی ۱ را در دو چندجمله‌ای قرار داده و سپس باقی‌مانده‌ها را باهم مساوی قرار می‌دهیم.

$$2(1)^2 - 5(1) + 4 = 1^2 + a(1) \Rightarrow 1 = 1 + a \Rightarrow a = 0$$

۵ - نکته: می‌دانیم:

$$x^n + a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots - a^{n-2}x + a^{n-1})$$

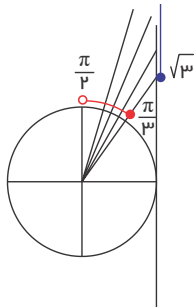
با توجه به نکته بالا داریم:

$$x^5 + 1 = (x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

۶ - با توجه به دایرهٔ مثلثاتی مقابل مشخص است که اگر  $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  باشد، نگاه تانژانت زاویهٔ  $x$  بزرگ‌تر یا مساوی  $\sqrt{3}$  است.

$$\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan x \geq \sqrt{3} \Rightarrow 2m - 1 \geq \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2m \geq 1 + \sqrt{3} \Rightarrow m \geq \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$



- ۷

$$T = 2\pi \quad b = 1 \quad a = 3 \quad a + b = 4$$

$$\frac{2\pi}{|b|} = 2 \Rightarrow |b| = \pi \begin{cases} |a| + c = 4 \\ -|a| + c = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} |a| = 3 \\ c = 1 \end{matrix}$$

هریک از توابع  $y = -3 \cos(\pi x) + 1$  یا  $y = 3 \cos(\pi x) + 1$  یا  $y = 3 \cos(\pi x) + 1$  یا  $y = -3 \cos(\pi x) + 1$  مورد قبول است.

$$2 \cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x (2 \cos x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

## الف

حد صورت و مخرج کسر را در نقطه  $\frac{\pi}{2}$  به دست آورده و بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (x+1) = \frac{\pi}{2} + 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x+1}{\tan x} = 0$$

## ب

برای محاسبه حدهایی که صورت و مخرج آنها به بی‌نهایت میل می‌کند و همچنین دو تابع چند جمله‌ای هستند، از هم‌ارزی پرتوان استفاده می‌کنیم:

نکته:  $ax^n + bx^{n-1} + \dots \sim_{x \rightarrow \pm\infty} ax^n$  هم‌ارزی پرتوان

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x^2 + 1} \stackrel{\text{قاعده پرتوان}}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

## الف

با توجه به اینکه  $\lim_{x \rightarrow 3^+} [x] = 3$  داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x] - 1}{x - 3} = \frac{[3 + \varepsilon] - 1}{3 + \varepsilon - 3} = \frac{3 - 1}{+\varepsilon} = \frac{2}{+\varepsilon} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\text{الف) ۲} \quad \text{ب) } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \end{cases}$$

۱۳ - با توجه به نمودار مخرج باید در نقطه  $x = -1$  ریشه مضاعف داشته باشد. پس:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{b}{2} = -1 \Rightarrow b = 2$$

با توجه به نمودار  $x = -1$  مجانب قائم است؛ پس ریشه مخرج  $(x^2 + 2x + c)$  است داریم:

$$(-1)^2 - 2 + c = 0 \Rightarrow c = 1$$

۱۴ - چون حد در بی‌نهایت کسر برابر با عدد ۲ شده پس باید صورت و مخرج هم‌درجه باشند لذا باید  $a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$  بنابراین داریم:

با توجه به قاعده پرتوان:  $ax^n + bx^{n-1} + \dots \sim_{x \rightarrow \pm\infty} ax^n$  داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 3}{bx^2 + 1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{bx^2} = 2 \Rightarrow \frac{2}{b} = 2 \Rightarrow b = 1$$

## الف

می‌دانیم  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{x+2} = 3$ ، حال باید ببینیم کسر  $\frac{3x+1}{x+2}$  چگونه به ۳ میل می‌کند، برای این کار ۳ برابر مخرج را در صورت ایجاد می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{3x+1}{x+2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{3x+6-5}{x+2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{3(x+2)-5}{x+2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 3 - \frac{5}{x+2} \right]$$

$$= \left[ 3 - \frac{5}{+\infty} \right] = \left[ 3 - 0^+ \right] = \left[ 3 - \varepsilon \right] = 2$$

## ب

می‌دانیم  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{x-1} = 1$ ، حال باید ببینیم کسر  $\frac{x+2}{x-1}$  چگونه به یک میل می‌کند، برای این کار مخرج را در صورت ایجاد می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{x+2}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{x-1+3}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{x-1}{x-1} + \frac{3}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ 1 + \frac{3}{x-1} \right]$$

$$= \left[ 1 + \frac{3}{-\infty} \right] = \left[ 1 + 0^- \right] = \left[ 1 - \varepsilon \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1 \Rightarrow y = -1 \quad \text{مجانِب افقى}$$

$$x^2 + x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 & \text{مجانِب قائم نيسْت} \\ x = 0 & \text{مجانِب قائم} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{3x - 1}{mx + 4}$$

چون خط  $x = -2$  مجانِب قائم تابع است، پس مخرج به ازای  $x = -2$  بايد صفر شود، پس داريم:

$$mx + 4 = 0 \xrightarrow{x=-2} -2m + 4 = 0 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{3x - 1}{2x + 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x - 1}{2x + 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

خط  $y = \frac{3}{2}$  مجانِب افقى تابع است.



ش صندلی:

نام و نام خانوادگی:

سؤال امتحان درس: حسابان ۲

نام واحد آموزشی: .....

پایه: دوازدهم

نام دبیر:

نوبت امتحانی: نیمسال اول

رشته: ریاضی

سال تحصیلی: ۱۴۰۳-۱۴۰۲

ساعت امتحان: ۸:۰۰ صبح

زمان پاسخگویی: ۱۱۰ دقیقه

تاریخ امتحان: ۱۴۰۲ / ۱۰ / ۹

تعداد صفحه سؤال: ۲ صفحه

۲	<p>۱- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید:</p> <p>(الف) تابع <math>y = \sqrt{2}x^4 - \pi x^2 + \frac{1}{3}</math> یک تابع چندجمله‌ای است.</p> <p>(ب) تابع <math>f(x) = \frac{x-1}{x+1}</math> در دامنه‌اش یکنواست.</p> <p>(پ) خط <math>y = \frac{1}{2}</math>، نمودار تابع <math>y = \cos x</math> را در فاصله <math>[-\pi, \pi]</math> در یک نقطه قطع می‌کند.</p> <p>(ت) حاصل <math>\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x+1}{4-x^2}</math> برابر <math>-\infty</math> است.</p>
۲	<p>۲- جاهای خالی را با عبارتهای مناسب، تکمیل کنید:</p> <p>(الف) اگر برد تابع <math>y = f(x-1)</math> بازه <math>[0, 2]</math> باشد، برد تابع <math>y = -2 + 2f(x+1)</math> برابر ..... است.</p> <p>(ب) دامنه تابع <math>y = \tan 4x</math> برابر ..... است.</p> <p>(پ) اگر دوره تناوب تابع <math>y = f(2x)</math>، برابر ۳ باشد، دوره تناوب تابع <math>y = 2f(3x)</math> برابر ..... می‌باشد.</p> <p>(ت) حاصل <math>\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x-1}{\tan x}</math> برابر ..... است.</p>
۱	<p>۳- بخشی از نمودار تابع <math>f(x) = 2 \tan(2x)</math> به شکل زیر است. <math>A+B</math> کدام است؟ (با ذکر دلیل)</p>  <p>(۱) <math>\frac{\pi}{4}</math></p> <p>(۲) <math>\frac{\pi}{2}</math></p> <p>(۳) <math>\frac{3\pi}{4}</math></p> <p>(۴) <math>-\frac{\pi}{4}</math></p>
۱	<p>۴- کدام شکل وضعیت نمودار تابع <math>f(x) = \frac{[-x]}{1-x}</math>، در نزدیکی مجانب قائم آن را نشان می‌دهد؟ دلیل خود را بنویسید.</p>  <p>(۱)</p> <p>(۲)</p> <p>(۳)</p> <p>(۴)</p>
۱	<p>۵- مقادیر <math>a</math> و <math>b</math> را چنان بیابید که عبارت <math>P(x) = x^4 - ax^3 + b</math> بر <math>x-1</math> بخش پذیر بوده و باقی مانده تقسیم آن بر <math>x-2</math> برابر ۳ باشد.</p>
«ادامه سؤالات در صفحه دوم»	



ش صندلی:

نام و نام خانوادگی:

سؤال امتحان درس: حسابان ۲

نام واحد آموزشی: .....

پایه: دوازدهم

نام دبیر:

نوبت امتحانی: نیمسال اول

رشته: ریاضی

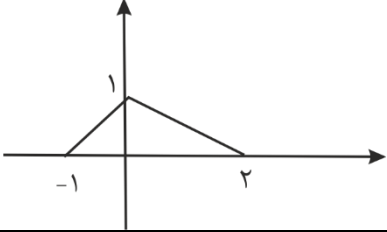
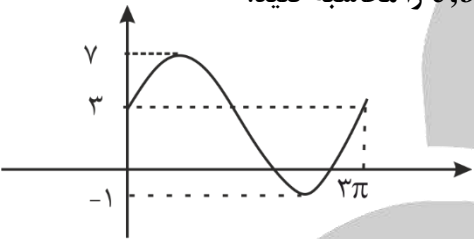
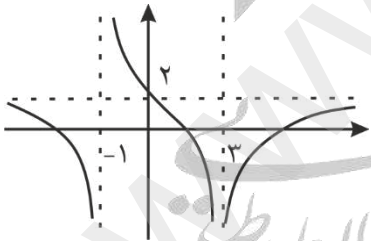
سال تحصیلی: ۱۴۰۳-۱۴۰۲

ساعت امتحان: ۸:۰۰ صبح

زمان پاسخگویی: ۱۱۰ دقیقه

تاریخ امتحان: ۱۴۰۲ / ۱۰ / ۹

تعداد صفحه سؤال: ۲ صفحه

۱/۵	۶- نمودار تابع $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x$ را به کمک انتقال نمودار $f(x) = x^3$ رسم کنید و یکنوایی تابع $g(x)$ را بررسی کنید.
۲	۷- اگر نمودار $f(x-1)$ به صورت زیر باشد، نمودار تابع $-2f(2x+1)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را بیابید.
	
۱	۸- حاصل عبارت $\frac{(x^6 - 64)(x - 2)}{(x^2 - 4)}$ را با تجزیه و ساده کردن کامل مخرج به دست آورید.
۲	۹- مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin 2x + \sqrt{3} \cos x = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ را به دست آورید.
۱/۵	۱۰- نمودار داده شده مربوط به تابعی با ضابطه $y = a \sin bx + c$ است. مقادیر $a, b, c$ را محاسبه کنید.
	
۲	۱۱- حدود توابع زیر را در صورت وجود بیابید: [ ] علامت جزء صحیح است.
	الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[-x] + 3}{x^2 - 4x + 4}$ ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 3x - 2}{1 + x - x^3}$
۱	۱۲- نمودار تابع $f$ به شکل زیر است. حدهای زیر را محاسبه کنید:
	
	الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ب) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$
۱	۱۳- مجانب‌های تابع $y = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$ را به دست آورید.
۱	۱۴- اگر $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{ax - 2}{(3 - x)^5} = -\infty$ باشد، حدود $a$ را تعیین کنید.
۲۰	



۱- هر مورد (۰/۵ نمره)

(ب) نادرست (صفحه ۱۵ تا ۱۸)  
(ت) درست (صفحه ۵۴ و ۵۵)

(الف) درست (صفحه ۱۱ کتاب)  
(پ) نادرست (صفحه ۳۸ کتاب)

۲- هر مورد (۰/۵ نمره)

(ب)  $x \neq \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$  (صفحه ۳۲)  
(ت)  $\circ$  (صفحه ۵۳)

(الف)  $[-2, 2]$  (صفحه ۸ تا ۱۰)

(پ) ۲ (صفحه ۲۴ تا ۲۶)

۳- گزینه ۱ (صفحه ۳۲)

$$\left. \begin{array}{l} A: 2x = -\frac{\pi}{2} : A = -\frac{\pi}{4} \quad \text{نمره } 0/25 \\ B: \operatorname{tg} 2x = 0 \Rightarrow 2x = \pi \Rightarrow B = \frac{\pi}{2} \quad \text{نمره } 0/25 \end{array} \right\} A + B = \frac{\pi}{4} \quad \text{نمره } 0/5$$

۴- گزینه ۴ (صفحه ۵۶ و ۵۷)

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow \frac{[(-1)^-]}{0^-} = \frac{-2}{0^-} = +\infty \quad \text{نمره } 0/5$$

$$x \rightarrow 1^- \Rightarrow f(x) \rightarrow \frac{[(-1)^+]}{0^+} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \quad \text{نمره } 0/5$$

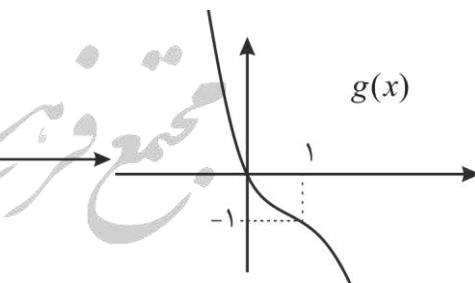
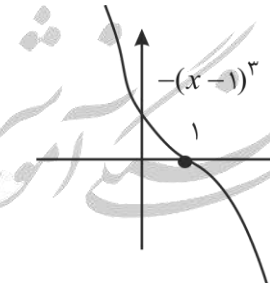
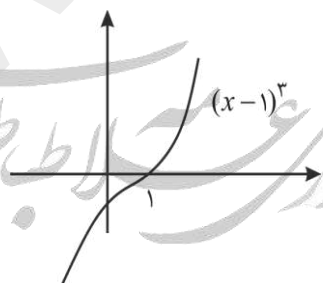
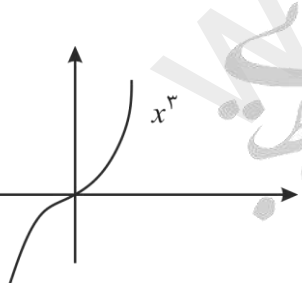
۵- (صفحه ۲۲)

$$\left. \begin{array}{l} P(1) = 0 : 1 - a + b = 0 \\ P(2) = 3 : 16 - 8a + b = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 7a - 15 = -3 \Rightarrow a = \frac{12}{7}, b = \frac{5}{7}$$

نمره ۰/۲۵    نمره ۰/۲۵

۶- (صفحه ۱۴)

$$g(x) = -(x-1)^3 - 1 \quad \text{نمره } 0/25$$

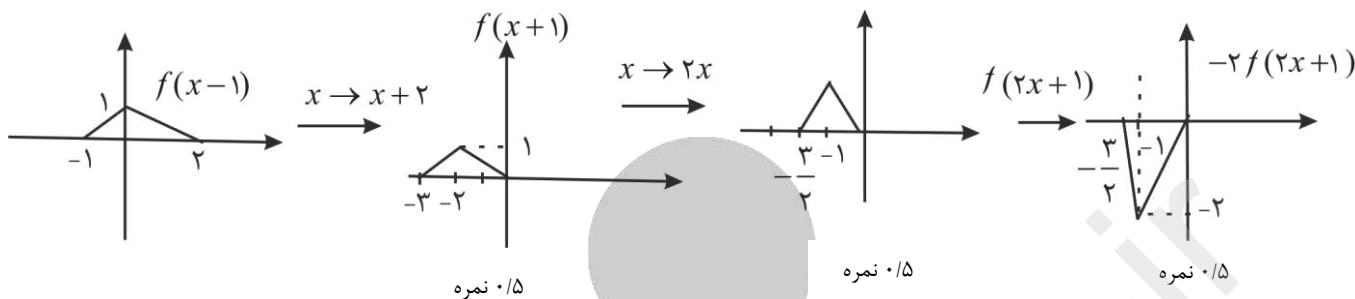


تابع  $g(x)$  اکیداً نزولی است. (نمره ۰/۲۵)





۷- (صفحه ۱۲)



دامنه:  $[-\frac{3}{2}, 0]$  برد:  $[-2, 0]$

نمره ۰/۲۵

نمره ۰/۲۵

نمره ۰/۵

۸- (صفحه ۲۰ تا ۲۲)

$$\frac{(x^6 - 64)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{(x+2)(x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 16x - 32)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 16x - 32$$

نمره ۰/۲۵

نمره ۰/۲۵

۹- (صفحه ۴۰ تا ۴۴)

$$2 \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (2 \sin x + \sqrt{3}) = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\text{یا } \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\text{مجموع جوابها در بازه } \frac{\pi}{2} + \pi + \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{2} + 2\pi - \frac{\pi}{3} = 5\pi$$

۱۰- (صفحه ۲۵ تا ۲۹)

$$\text{دوره تناوب } T = 3\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{2}{3}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Max} &= |a| + C = 7 \\ \text{min} &= -|a| + C = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow C = 3, |a| = 4$$

$$a \cdot b > 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 4, b = \frac{2}{3} \\ \text{یا} \\ a = -4, b = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

www.mat.ir

الف)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[(-2)^+] + 3}{(x-2)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$  (صفحه ۵۵) نمره ۰/۵

نمره ۰/۵



ب)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{-x^3} = -1$  نمره ۰/۵  
نمره ۰/۵

(صفحه ۶۶)

۱۲- (صفحه ۶۹)

الف)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$  نمره ۰/۵

ب)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$  نمره ۰/۵

۱۳- (صفحه ۵۵ و ۵۶)

مجانِب های قائم:  $x \rightarrow 1 \Rightarrow y \rightarrow \frac{3}{2}$  نمره ۰/۲۵  
 $x \rightarrow -1 \Rightarrow y \rightarrow \infty$  نمره ۰/۲۵

مجانِب افقی:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$  نمره ۰/۲۵  
 $y = 1$  مجانب افقی  $\Rightarrow$  نمره ۰/۲۵

۱۴- (صفحه ۵۵ تا ۵۸)

$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{ax-2}{(3-x)^5} = \frac{3a-2}{0^-} = -\infty \Rightarrow 3a-2 > 0 \Rightarrow a > \frac{2}{3}$   
نمره ۰/۲۵      نمره ۰/۲۵      نمره ۰/۵

مجمع فرهنگی آموزشی علامه طباطبائی

www.mat.ir



نام دبیر:

عنوان درس: حسابان ۲

پایه تحصیلی و رشته:  
دوازدهم ریاضی

جمهوری اسلامی ایران

آموزش و پرورش شهرستان آمل  
دبیرستان نمونه دولتی آیت...آملی  
نوبت اول - دی ماه ۱۴۰۲

شماره سندلی

:

مدت آزمون: ۱۰۰ دقیقه

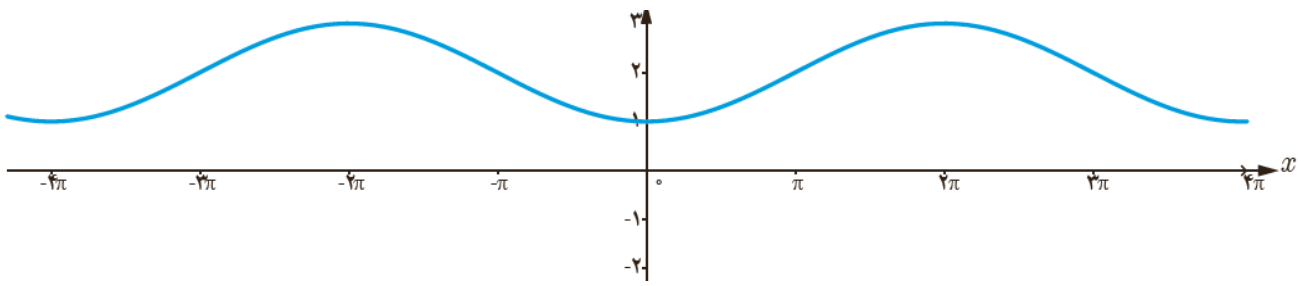
تاریخ امتحان ۱۴۰۲/۱۰/۲

ساعت برگزاری صبح

محل مهر  
آموزشگاه

نام و نام خانوادگی دانش آموز:

ردیف	شرح سوال	بارم
۱	درستی یا نادرستی عبارت های زیر را تعیین کنید. الف) عبارت $x^4 - x^3 - 1$ بر $x + 2$ بخش پذیر است ب) اگر تابعی اکیدا یکنوا باشد آنگاه یک به یک می باشد ج) اگر $k > 1$ باشد آنگاه نمودار $y = f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور $x$ ها بدست می آید	۷۵/۰
۲	جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید الف) اگر دوره تناوب تابع $y = \cos 3kx$ برابر $\frac{\pi}{6}$ باشد مقدار $k$ برابر ..... است ب) دامنه تابع $y = 2 \tan 5x + 1$ برابر ..... است ج) درجه چند جمله ای $f(x) = x^3(2x^2 + 5)^7$ برابر ..... است د) اگر $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{mx^2 + 2x - 1}{5x^2 + 3} = 10$ آنگاه $m$ برابر ..... است	۲
۳	اگر $A(3, -2)$ یک نقطه روی نمودار تابع $f(x)$ باشد نقطه متناظر این نقطه روی تابع $g(x) = -2f(2x-1) + 3$ را بیابید	۱
۴	اگر تابع $f = \{(-3, m-4n), (2m-n, n+2), (0, 2n-3)\}$ هم صعودی و هم نزولی باشد مقدار $m$ و $n$ را بیابید	۱
۵	الف) نمودار تابع $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$ را رسم کنید ب) ضابطه $f^{-1}$ را بدست آورید	۲
۶	اگر چند جمله ای $p(x) = x^3 + ax^2 - 16$ بر $x - a$ بخش پذیر باشد مقدار $a$ و باقی مانده تقسیم چند جمله ای $p(x)$ را بر $2x + 2$ بدست آورید	۱
۷	عبارت مقابل را تا حد امکان ساده کنید	۷۵/۰
	ادامه سوال در صفحه دوم	

۲	<p style="text-align: right;">ضابطه مربوط به نمودار داده شده را بنویسید</p> 	۸
۳	<p style="text-align: right;">معادلات زیر را حل کنید</p> <p>الف) <math>\tan x \cdot \tan 2x = 1 \quad [0, 2\pi]</math></p> <p>ب) <math>(\sin x + \cos x)^2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}</math></p>	۹
۱	<p>اگر <math>\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2ax-5}{(2-x)^3} = +\infty</math> باشد حدود a را تعیین کنید</p>	۱۰
۲	<p>الف) مجانبهای قائم و افقی تابع <math>f(x) = \frac{3x-1}{ 2x -1}</math> را بیابید</p> <p>ب) نمودار تابع <math>f(x) = \frac{x-1}{x^3+x}</math> اطراف مجانب قائم به چه صورت است</p>	۱۱
۳	<p style="text-align: right;">حد توابع زیر را بیابید</p> <p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow 4} \frac{[x]-4}{x^2-16}</math></p> <p>ب) <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{25x^2-5x+7}-3x}{2x+\sqrt{16x^2+x}-3}</math></p> <p>ج) <math>\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+\sin^2 x}{x^2}</math></p>	۱۲
۰/۵	<p>اگر بخواهیم فاصله تابع <math>f(x) = \frac{1}{x}</math> تا محور xها از <math>\frac{1}{10^6}</math> کمتر شود x را باید حداقل از چه عددی بزرگتر در نظر بگیریم</p>	۱۳
۲۰	<p style="text-align: center;">بیوسته پیروز و سر بلند باشید.</p> <p style="text-align: left;">جمع نمرات</p>	

باسم تسبیح تسبیان ۲ - نمونه دولتی آمل

نویسنده: احسان مخفی زاده - دانشجوی داوسازی زنجان - مؤلف کتاب های ریاضی اول دوازدهم تجربی و پرستار ریاضی  
یار دهم انسانی - طراح و ویراستار استاد درس ریاضی آزمون های کانفرن

باسم سؤال ۱ الف) نادرست ب) درست ج) نادرست

باسم سؤال ۲ الف) ۴ ب)  $x \neq \frac{4x}{5} + \frac{x}{10}$  ج) ۱۷ د) ۵۰

$$A(3, -2) \rightarrow f(3) = -2$$

باسم سؤال ۳

$$g(x) = -2f(2x-1) + 3 \rightarrow 2x-1 = 3 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2$$

$$\rightarrow g(2) = -2f(3) + 3 = -2(-2) + 3 = 4 + 3 = 7 \rightarrow A(2, 7)$$

$$f = \{(-2, m-4n), (2m-n, n+2), (0, 2n+3)\} \rightarrow \text{تابع ثابت}$$

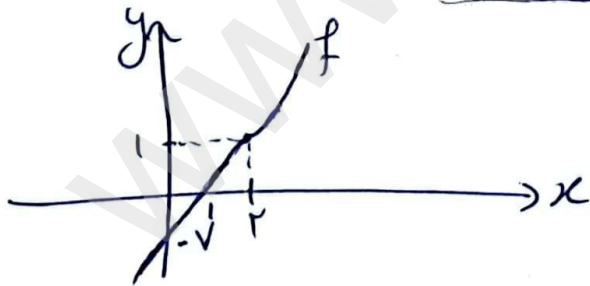
باسم سؤال ۴

$$\rightarrow \begin{cases} m - 2n = n + 2 \\ n = 0 \end{cases} \rightarrow m - 2 \cdot 0 = 2 \rightarrow m = 2$$

$$\begin{cases} n + 2 = 2n - 2 \\ n = 0 \end{cases} \rightarrow -n = -4 \rightarrow n = 4$$

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 12x - 7 = x^3 - 4x^2 + 12x - 1 + 1 = (x-2)^3 + 1$$

باسم سؤال ۵



$$\therefore f^{-1}(x) = ? \rightarrow y - 1 = (x-2)^3 \rightarrow x - 2 = \sqrt[3]{y-1} \rightarrow x = \sqrt[3]{y-1} + 2$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1} + 2$$

$$P(x) = x^4 + ax^2 - 14 \xrightarrow{\text{دو ضرب کنیم} \rightarrow x-a=0 \rightarrow x=a} x-a=0 \rightarrow x=a$$

(۶) با سؤال

$$\rightarrow P(a) = 0 \rightarrow a^4 + a^2 - 14 = 0 \rightarrow a^4 + a^2 = 14 \rightarrow 2a^2 = 14 \rightarrow a^2 = 7$$

$$\rightarrow a^2 = 7 \rightarrow a = \sqrt{7}$$

$$\rightarrow P(x) = x^4 + 2x^2 - 14 \quad \left| \begin{array}{l} 2x+2 \\ \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \end{array} \right. \rightarrow \text{باقی مانده} = -10$$

$$\frac{-x^4 - x^2}{x^4 + 2x^2 - 14}$$

$$\frac{x^2 - 14}{x^4 + 2x^2 - 14}$$

$$\frac{-x^2 - x}{x^2 - 14}$$

$$\frac{-x - 14}{-x^2 - x}$$

$$\frac{x + 1}{-x - 14}$$

$$-10$$

$$\frac{(1-x+x^2-x^3+x^4)(1+x)}{1-x^{10}} = \frac{1+x^5}{1-x^{10}} = \frac{1+x^5}{(1-x^5)(1+x^5)} = \frac{1}{1-x^5} \quad (\text{با سؤال ۷})$$

$$f(x) = a \cos bx + c \rightarrow \begin{cases} \min = 1 \rightarrow -|a| + c = 1 \\ \max = 3 \rightarrow |a| + c = 3 \end{cases} \rightarrow |a| = 1 \rightarrow a = \pm 1$$

(۸) با سؤال

$$f(x) = -\cos bx + 2$$

چون دهانه رو به پایین است پس  $a < 0$  است

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \rightarrow |b| = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$$

از طرفی دوره ی تناوب تابع برابر  $T = 4\pi$  است پس (ابعاد)

$$\rightarrow f(x) = -\cos \frac{1}{2}x + 2$$

الف)  $\tan x \times \tan^r x = 1 \rightarrow \tan x \times \frac{r \tan x}{1 - \tan^r x} = 1$  (9 باغ سوال)

$\rightarrow \frac{r \tan^r x}{1 - \tan^r x} = 1 \rightarrow 1 - \tan^r x = r \tan^r x \rightarrow r \tan^r x = 1 \rightarrow \tan^r x = \frac{1}{r}$

$\rightarrow \tan x = \pm \frac{1}{\sqrt[r]{r}} \rightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{\sqrt[r]{r}}{r} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \\ \tan x = -\frac{\sqrt[r]{r}}{r} \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$

ب)  $(\sin x + \cos x)^r = 1 - \frac{\sqrt[r]{r}}{r} \rightarrow \sin^r x + r \sin x \cos x + \cos^r x = 1 - \frac{\sqrt[r]{r}}{r} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}{r \sin x \cos x = \sin^2 x}$

$\rightarrow 1 + \sin^r x = 1 - \frac{\sqrt[r]{r}}{r} \rightarrow \sin^r x = -\frac{\sqrt[r]{r}}{r} \rightarrow r x = r k \pi - \frac{\pi}{r}$

$\rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{r}$

$\lim_{x \rightarrow r^+} \frac{r a x - a}{(r - x)^r} = +\infty \rightarrow \frac{r a (r)^+ - a < 0}{0^-} \rightarrow r a - a < 0 \rightarrow a < \frac{a}{r}$  (10 باغ سوال)

الف)  $f(x) = \frac{r x - 1}{|r x| - 1} \rightarrow r|x| = 1 \rightarrow |x| = \frac{1}{r} \rightarrow x = \pm \frac{1}{r}$  (11 باغ سوال)

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{r x - 1}{r x - 1} = \frac{r}{r} \rightarrow y = \frac{r}{r} \text{ موجب ثابت} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{r x - 1}{-r x - 1} = -\frac{r}{r} \rightarrow y = -\frac{r}{r} \text{ موجب افقی} \end{cases}$

الف)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{[x] - 2}{x^2 - 14}$    
 $\rightarrow x \rightarrow 2^+ \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - 2}{x^2 - 14} = \frac{0}{\text{مطلق}} = 0$    
 $\rightarrow x \rightarrow 2^- \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{r - 2}{x^2 - 14} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$  (12 باغ سوال)

ب)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{r x^2 - a x + b} - r x}{r x + \sqrt{14 x^2 + x - r}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{r} |x - \frac{a}{r}| - r x}{r x + \sqrt{14} |x + \frac{1}{r}|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-a(x - \frac{a}{r}) - r x}{r x + \sqrt{14} (-x - \frac{1}{r})}$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\lambda x + \frac{1}{r}}{-r x - \frac{1}{\lambda}} = \frac{-\lambda x}{-r x} = r$

$$\begin{aligned}
 (2) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + \sin^2 x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + x^2}{x^2} = \frac{0}{0} \text{ صورت } \xrightarrow{\text{رقع}} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(1+x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1+x}{x} \\
 &= \frac{1}{0^+} = +\infty
 \end{aligned}$$

(۱۲) تابع معکوس

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

تابع معکوس (۱۳) با علامت  $10^{-6}$  (بسیار کوچک) نیز کمتر در نظر بگیریم.