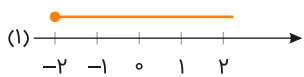


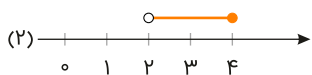
۱

$$A = [-2, 4] \quad B = (2, +\infty)$$

$$1) A \cup B = [-2, +\infty)$$



$$2) A \cap B = (2, 4]$$



مجموعه اعداد طبیعی ( $\mathbb{N}$ ) و مجموعه اعداد حسابی ( $\mathbb{W}$ ) که  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W}$  بوده و  $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\}$  است.

۲

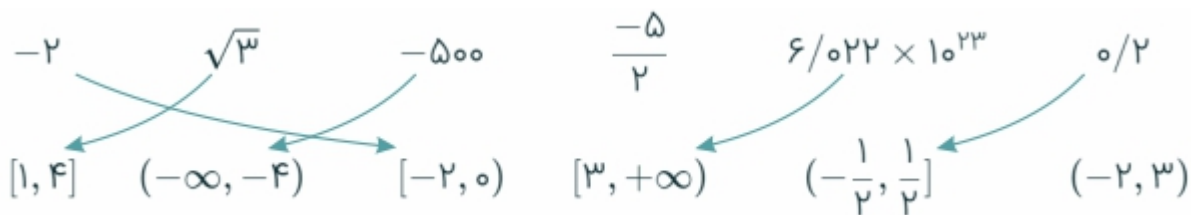
۳  
الف

$$C = \{5, 10\} \quad , \quad D = \{5, 10, 15, 20, 25\}$$

مجموعه اعداد طبیعی و اعداد حسابی که مجموعه اعداد طبیعی زیرمجموعه‌ای از مجموعه اعداد حسابی است.

۴

۵



$$A = \{1, 2, 3, \dots\} \quad , \quad B = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \Rightarrow A \cap B = \{1, 2, 3\}$$

۶

۷

$$A = \{۲, ۴, ۶, ۸, \dots\}, A' = \{۱, ۳, ۵, ۷, \dots\}$$

$$B = \{۴, ۵, ۶, ۷, \dots\}, B' = \{۱, ۲, ۳\}$$

$$C = \{۱, ۲, ۳, \dots, ۱۰۰\}, C' = \{۱۰۱, ۱۰۲, ۱۰۳, \dots\}$$

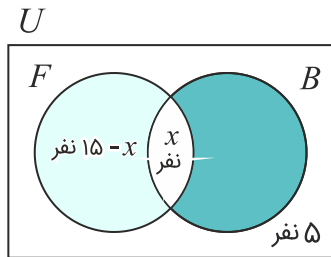
$C'$  باید نامتناهی باشد، چون اجتماع دو مجموعه متناهی یک مجموعه نامتناهی نمی‌شود.

$$n(A) = ۲۰, n(B) = ۲۲, n(A \cap B) = ۱۲$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = ۲۰ + ۲۲ - ۱۲ = ۳۰$$

$$\text{الف) تعداد کل} = ۳۰ + ۵ = ۳۵$$

$$\text{ب) یک رشته‌ای} = n(A \cup B) - n(A \cap B) = ۳۰ - ۱۲ = ۱۸$$

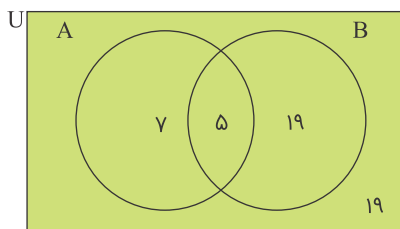


چون ۵ نفر عضو هیچ‌یک از این دو تیم نیستند، پس  $n(B \cup F) = ۲۰$ . حال با نوشتن فرمول  $n(B \cup F)$  می‌توان  $n(B \cap F)$  را به دست آورد.

$$n(B \cup F) = n(B) + n(F) - n(B \cap F)$$

$$\Rightarrow ۲۰ = ۱۱ + ۱۵ - n(B \cap F) \Rightarrow n(B \cap F) = ۲۶ - ۲۰ = ۶$$

بنابراین ۶ نفر عضو هر دو تیم فوتبال و بسکتبال هستند.



$$\text{الف) } n(B) = ۲۴$$

$$\text{ب) } n(A') = n(U) - n(A) = ۵۰ - ۱۲ = ۳۸$$

$$\text{ج) } n(A' \cap B) = n(B \cap A') = n(B - A) = ۱۹$$

$$\text{د) } n((B - A)') = n(U) - n(B - A) = ۵۰ - ۱۹ = ۳۱$$

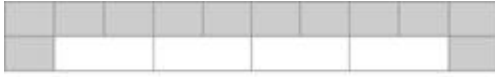
$$n(A) = ۱۸, \quad n(B) = ۱۶$$

$$n(A \cup B) = ۳۲ - ۵ = ۲۷$$

$\downarrow$                        $\downarrow$   
 فوتبال                  بسکتبال

$$\Rightarrow ۲۷ = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow ۲۷ = ۱۸ + ۱۶ - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = ۷$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = ۱۸ - ۷ = ۱۱$$



۱۲ کاشی تیره - ۴ کاشی سفید

۱۲ الف

$$۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۴, ۱۶, ۱۸$$

$$t_n = ۲n + ۴$$

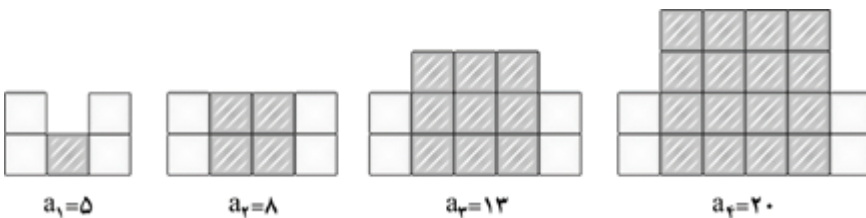
$$t_{۱۰۰} = (۲ \times ۱۰۰) + ۴ = ۲۰۰ + ۴ = ۲۰۴$$

$$t_n = ۵۰ \Rightarrow ۲n + ۴ = ۵۰ \Rightarrow ۲n = ۴۶ \Rightarrow n = ۲۳$$

بنابراین در شکل بیست و سوم ۵۰ کاشی تیره و ۲۳ کاشی سفید موجود است.

$$a_1 = ۲, \quad a_۲ = ۵, \quad a_۳ = ۱۰, \quad a_۴ = ۱۷$$

$$۵, ۸, ۱۳, ۲۰, ۲۹, \dots$$



بنابراین جمله عمومی دنباله به صورت  $a_n = n^2 + ۴$  به دست می‌آید.

ب

پ

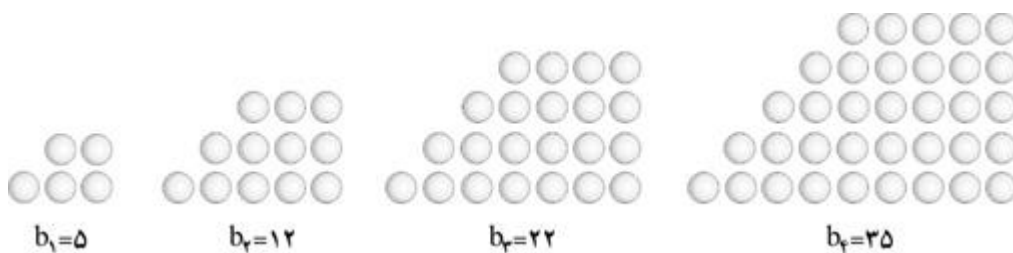
ت

ث

۱۳

۱۴ الف

۵, ۱۲, ۲۲, ۳۵, ۵۱, ...



$$b_n = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)}{2} = (n+1) \left( n+1 + \frac{n}{2} \right) = (n+1) \left( \frac{3}{2}n + 1 \right)$$

۱, ۳, ۶, ۱۰, ۱۵, ۲۱

الف ۱۵

این دنباله نمی‌تواند یک دنباله خطی باشد؛ زیرا فاصله هر دو جمله متوالی آن مقدار ثابتی نیست.

ب

$a_n = n^2 - 1$  : ۰, ۳, ۸, ۱۵, ۲۴

الف ۱۶

$b_n = -n + ۴$  : ۳, ۲, ۱, ۰, -۱, -۲

ب

$c_n = -۱۳ + ۲n$  : -۱۱, -۹, -۷, -۵, -۳

پ

$$d = \frac{۲۷ - ۷}{۳ + ۱} = \frac{۲۰}{۴} = ۵ \Rightarrow d = ۵$$

۱۷

$$۲۷ = ۷ + ۴d \Rightarrow d = ۵$$

یا

$$d = \frac{a_۵ - a_۱}{۵ - ۱} = \frac{۲۷ - ۷}{۴} = \frac{۲۰}{۴} = ۵$$

یا

۷, ۱۲, ۱۷, ۲۲, ۲۷

۱۰, ۱۴, ۱۸, ۲۲, ۲۶

$$d = \frac{a_n - a_m}{n - m} = \frac{۲۶ - ۱۰}{۵ - ۱} = ۴ \quad \text{یا} \quad d = \frac{b - a}{n + ۱} = \frac{۲۶ - ۱۰}{۳ + ۱} = ۴$$

$$\left. \begin{aligned} d &= \frac{۵۲ - ۱۲}{۴ + ۱} = \frac{۴۰}{۵} = ۸ \Rightarrow d = ۸ \\ ۱۲ + ۵d &= ۵۲ \Rightarrow d = ۸ \end{aligned} \right\}$$

به دست آوردن  $d$  از هر دو روش درست است.

$$۱۲ \xrightarrow{+۸} ۲۰ \xrightarrow{+۸} ۲۸ \xrightarrow{+۸} ۳۶ \xrightarrow{+۸} ۴۴ \xrightarrow{+۸} ۵۲$$

$$\begin{cases} a_1 + ۱۰d = ۴۷ \\ a_1 + ۱۶d = ۷۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a_1 - ۱۰d = -۴۷ \\ a_1 + ۱۶d = ۷۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} d &= ۵ \\ a_1 &= -۳ \end{aligned}$$

راه حل دوم:

$$d = \frac{۷۷ - ۴۷}{۱۷ - ۱۱} = ۵ \quad ۴۷ = a_1 + ۱۰ \times ۵ \Rightarrow a_1 = -۳$$

$$a_n = ۹۵ \Rightarrow ۲ + (n - ۱) \times ۳ = ۹۵ \Rightarrow ۳n - ۳ = ۹۳ \Rightarrow n = ۳۲$$

$$\begin{aligned} ۲۲۵ &= ۲۵ + (n - ۱)۲۰ \Rightarrow ۲۰۰ = ۲۰n - ۲۰ \\ ۲۲۰ &= ۲۰n \Rightarrow n = ۱۱ \end{aligned}$$

سهم هر تیم را می‌توان به صورت یک دنباله حسابی به شکل زیر نوشت ( $t_1$ : سهم تیم آخر از سکه‌ها):

$$t_1, t_1 + d, t_1 + 2d, t_1 + 3d, t_1 + 4d$$

مطابق فرض مسئله داریم:

$$t_1 + t_1 + d + t_1 + 2d + t_1 + 3d + t_1 + 4d = 60$$

$$\Rightarrow 5t_1 + 10d = 60 \Rightarrow t_1 + 2d = 12$$

از طرفی قرار است مجموع سکه‌های دریافتی سه تیم اول معادل دو تیم آخر باشد، در نتیجه داریم:

$$t_1 + t_1 + d + t_1 + 2d = t_1 + 3d + t_1 + 4d$$

$$3t_1 + 3d = 2t_1 + 7d \Rightarrow t_1 - 4d = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 + 2d = 12 \\ t_1 - 4d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + 2d = 12 \\ -t_1 + 4d = 0 \end{cases} \Rightarrow 6d = 12 \Rightarrow d = 2$$

$$\xrightarrow[\text{با جایگذاری در } t_1 - 4d = 0]{\text{با جایگذاری در}} t_1 - 4 = 0 \Rightarrow t_1 = 4$$

پس ۶۰ سکه به ترتیب زیر بین پنج برگزیده تقسیم خواهد شد:

$$4, 10, 12, 14, 16$$

یک پیشنهاد: در سؤالاتی که تعداد جملات دنباله فرد است بهتر است جمله وسط را  $t$  بگیریم و جملات بعدی را با افزودن قدر نسبت و جملات قبل را با کم کردن قدر نسبت به دست آورید. به عنوان مثال:

$$t - 2d, t - d, t, t + d, t + 2d$$

در این صورت راه‌حل‌تان کوتاه‌تر خواهد شد.

$$\begin{cases} a_7 + a_5 = -7 \\ a_3 + a_9 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + d + a + 4d = -7 \\ a + 2d + a + 7d = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \times(-1) \begin{cases} 2a + 5d = -7 \\ 2a + 9d = 9 \end{cases} \xrightarrow{+} 4d = 16 \Rightarrow d = 4$$

$$\xrightarrow{\text{رابطه ۱}} 2a + 5 \times 4 = -7 \Rightarrow 2a = -7 - 20 \Rightarrow a = -\frac{27}{2}$$

$$a_n = a + (n - 1)d \Rightarrow a_n = -\frac{27}{2} + (n - 1) \times 4$$

$$\Rightarrow a_n = 4n - \frac{35}{2}$$

$$\begin{cases} a_3 = 27 \Rightarrow a_1 r^2 = 27 \\ a_6 = 729 \Rightarrow a_1 r^5 = 729 \Rightarrow \frac{a_1 r^5}{a_1 r^2} = \frac{729}{27} \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 r^2 = 27 \Rightarrow a_1 \times 9 = 27 \Rightarrow a_1 = 3 \\ a_9 = a_1 r^8 \Rightarrow 3 \times 3^8 = 3^9 \end{cases}$$

روش دوم :  $r^{\Delta-2} = \frac{729}{27} = 27 \Rightarrow r = 3$

$$a_9 = a_3 \times r^{9-3} \Rightarrow a_9 = 27 \times 3^6 = 3^9$$

پاسخ سؤال ٢٦

ثابت

$$\frac{20}{100} = \frac{1}{5} \Rightarrow q = \frac{4}{5}$$

$$a_5 = a_1 q^4 = 5 \times 10^4 \times \left(\frac{4}{5}\right)^4 = 163840$$

$$\begin{aligned} a_3 = 12 \Rightarrow ar^2 = 12 \\ a_6 = 96 \Rightarrow ar^5 = 96 \Rightarrow \frac{a_6}{a_3} = \frac{ar^5}{ar^2} = r^3 = \frac{96}{12} = 8 \Rightarrow r = 2, a_1 = 3 \end{aligned}$$

جملات دنباله : ٣, ٦, ١٢, ٢٤, ...