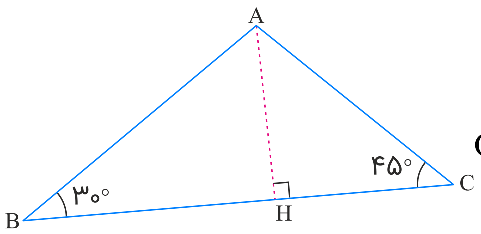
۱

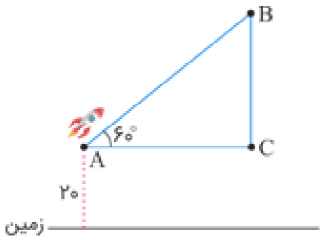
ابتدا ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. سپس داریم:



$$CH = AH = ۱۰ \sin ۴۵^\circ = ۱۰ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۵\sqrt{۲} \Rightarrow AB = ۱۰\sqrt{۲} \Rightarrow BH = ۵\sqrt{۶}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}} = \frac{۱۰\sqrt{۲}}{\frac{۱}{۲} \times ۵\sqrt{۲} \times (۵\sqrt{۲} + ۵\sqrt{۶})} = \frac{۲۰\sqrt{۲}}{۵۰ + ۲۵\sqrt{۱۲}}$$

۲



$$AB = ۱۰۰\sqrt{۳} \quad , \quad BC = ?$$

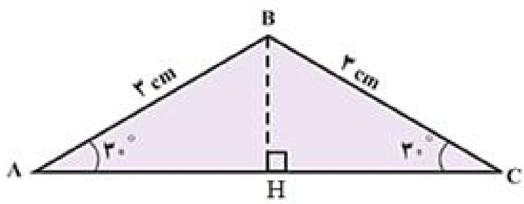
$$\sin ۶۰^\circ = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{BC}{۱۰۰\sqrt{۳}} \Rightarrow BC = \frac{۳۰۰}{۲} = ۱۵۰$$

بنابراین پس از طی $۱۰۰\sqrt{۳}$ متر، موشک به ارتفاع $۱۵۰ + ۲۰ = ۱۷۰$ متر از سطح زمین می‌رسد.

۳

$$\frac{\text{قد علی}}{\text{سایه‌اش}} = \frac{۱۸۰}{۶۰} = \frac{h}{۴} \Rightarrow h = ۱۲$$

۴



$$S = \frac{۱}{۲} BH \times AC$$

$$\text{Sin}۳۰^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{BH}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{BH}{۳} \Rightarrow BH = \frac{۳}{۲}$$

$$\text{Cos}۳۰^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{AH}{۳} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{AH}{۳} \Rightarrow AH = \frac{۳}{۲}\sqrt{۳}$$

$$AC = ۲AH = ۲ \times \frac{۳}{۲}\sqrt{۳} = ۳\sqrt{۳}$$

$$S = \frac{۱}{۲} BH \times AC = \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۲} \times ۳\sqrt{۳} = \frac{۹\sqrt{۳}}{۴} \Rightarrow S = \frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$$

۵

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{۵}{۳} \qquad \cot M = \frac{MN}{NO} = \frac{۲}{۲/۵} \qquad \tan F = \frac{GE}{EF} = \frac{۴}{۲}$$

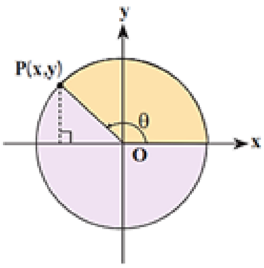
$$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{۳}{۵} \qquad \tan M = \frac{NO}{MN} = \frac{۲/۵}{۲} \qquad \cot F = \frac{EF}{GE} = \frac{۲}{۴}$$

۶ یک شش ضلعی منتظم به ضلع a از ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a تشکیل شده است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$S_{\text{شش ضلعی}} = ۶S_{\text{مثلث}} = ۶ \times (\frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۳ \times \sin ۶۰^\circ) = \frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲}$$

۷ می‌دانیم $\sin\theta = y = \frac{۵}{۷}$، بنابراین P نقطه‌ای به عرض $\frac{۵}{۷}$ است.

طبق رابطهٔ فیثاغورس، در مثلث قائم‌الزاویه داریم $x^۲ + y^۲ = ۱$، بنابراین $x^۲ + (\frac{۵}{۷})^۲ = ۱$ و درنتیجه $x^۲ = \frac{۲۴}{۴۹}$، چون θ زاویه‌ای در ربع دوم است، پس طول نقطهٔ P منفی است و ازاین‌رو $x = -\frac{۲\sqrt{۶}}{۷}$ قابل‌قبول است. پس P نقطه‌ای به مختصات $(-\frac{۲\sqrt{۶}}{۷} \text{ و } \frac{۵}{۷})$ است، درنتیجه:



$$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-\frac{۲\sqrt{۶}}{۷}}{\frac{۵}{۷}} = -\frac{۲\sqrt{۶}}{۵}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{۵}{۷}}{-\frac{۲\sqrt{۶}}{۷}} = -\frac{۵}{۲\sqrt{۶}}$$

$$\cos\theta = x = -\frac{۲\sqrt{۶}}{۷}$$

۸ اگر $\cos\theta$ مثبت بوده و $\sin\theta$ منفی باشد در این صورت θ در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی واقع می‌شود (در این ناحیه $x > ۰$ و $y < ۰$ بوده و درنتیجه $\sin\theta$ منفی و $\cos\theta$ مثبت است).

۹ اگر هر دو مقدار $\sin\theta$ و $\cos\theta$ مثبت باشند، انتهای کمان θ در ربع اول مثلثاتی قرار دارد.

۱۰ برای اینکه $\sin\theta < ۰$ و $\cos\theta > ۰$ باشد، θ باید در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی قرار گیرد. هر زاویه‌ای که در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی باشد، دارای این شرایط است بنابراین زاویه‌ای مانند ۳۳۰° می‌تواند دارای این ویژگی باشد.

۱۱

$$m = \tan ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \quad , \quad A = (۰\,,\,-۲)$$

$$y - y_۰ = m(x - x_۰) \Rightarrow y + ۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x \Rightarrow y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x - ۲$$

۱۲

$$\text{شیب خط} = \tan ۳۰^\circ = \frac{\sin ۳۰^\circ}{\cos ۳۰^\circ} = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\xrightarrow{\text{معادلهٔ خط}} y - y_۰ = m(x - x_۰) \Rightarrow y - ۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}(x - ۳)$$

$$\Rightarrow y = ۲ + \frac{\sqrt{۳}}{۳}x - \sqrt{۳} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x + (۲ - \sqrt{۳})$$

۱۳

$$m = \tan ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x + b \xrightarrow{(\sqrt{۳}\,,\,۲)} ۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \times \sqrt{۳} + b \Rightarrow b = ۱$$

$$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x + ۱$$

۱۴

$$\alpha = ۳۰^\circ \Rightarrow m = \tan\alpha = \tan ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \text{شیب خط} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\text{معادلهٔ خط} : y = mx + b \xrightarrow[x=۱,\,y=۰]{m=\frac{\sqrt{۳}}{۳}} ۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} + b \Rightarrow b = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x - \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

پاسخ سؤالات ۱۵ تا ۱۶

۱۵

$$\text{طرف چپ} = \sin^۴\theta - \cos^۴\theta \overset{\text{اتحاد مزدوج}}{=} (\sin^۲\theta - \cos^۲\theta)(\sin^۲\theta + \cos^۲\theta)$$

$$= (\sin^۲\theta - \cos^۲\theta) \times ۱ = \sin^۲\theta - \cos^۲\theta$$

۱۶

$$\text{طرف راست} = \frac{\tan\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\tan\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\sin\alpha} + \cot\alpha = \frac{۱}{\cos\alpha} + \cot\alpha$$

۱۷

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow 1+(-\frac{3}{4})^2=1+\frac{9}{16}=\frac{25}{16}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow \cos^2\alpha=\frac{16}{25}\xrightarrow[\cos\alpha<0]{90^\circ<\alpha<180^\circ}\cos\alpha=-\frac{4}{5}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow -\frac{3}{4}=\frac{\sin\alpha}{-\frac{4}{5}}\Rightarrow \sin\alpha=(-\frac{3}{4})(-\frac{4}{5})=\frac{3}{5}$$

$$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{1}{-\frac{3}{4}}=-\frac{4}{3}$$

۱۸

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow \tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow (\frac{4}{3})^2+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow \frac{25}{9}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{3}{5}\quad,\quad \sin\alpha=\frac{4}{5}\Rightarrow \sin\alpha+\cos\alpha=\frac{7}{5}$$

۱۹

$$\Rightarrow \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\times\frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}$$

$$=\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

۲۰

۱۵۰° در ناحیهٔ دوم است $\Rightarrow \sin:+\quad \cos:-\quad \tan:-\quad \cot:-$

$$\sin^2 150^\circ+\cos^2 150^\circ=1\Rightarrow \sin^2 150^\circ=1-(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin 150^\circ=\pm\frac{1}{2}\xrightarrow{\sin>0}\sin 150^\circ=+\frac{1}{2}$$

$$\tan 150^\circ=\frac{\sin 150^\circ}{\cos 150^\circ}=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 150^\circ=\frac{1}{\tan 150^\circ}=\frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{3}}}=-\sqrt{3}$$

۲۱

$$\tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}\Rightarrow \cos^2\alpha=\frac{4}{5}$$

$$\xrightarrow{\text{انتهای کمان در ناحیهٔ سوم}}\cos\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin\alpha=\tan\alpha.\cos\alpha=\frac{1}{2}\times\frac{-2}{\sqrt{5}}=\frac{-1}{\sqrt{5}}$$

$$\cot\alpha=2$$

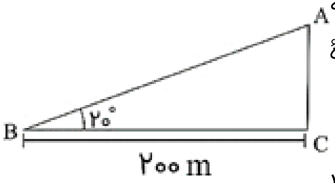
۲۲

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{۱-\sin^۲\alpha} \xrightarrow{\text{در ناحیهٔ سوم}} \cos\alpha = -\sqrt{۱-\frac{۱۶}{۲۵}} = -\frac{۳}{۵}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{۴}{۵}}{-\frac{۳}{۵}} = \frac{۴}{۳} \quad , \quad \cot\alpha = \frac{۱}{\tan\alpha} = \frac{۱}{\frac{۴}{۳}} = \frac{۳}{۴}$$

۲۳

عرض رودخانه در شکل رسم شده، اندازهٔ ضلع AC است. اندازهٔ ضلع BC مشخص است. باتوجه‌به اینکه $\sin ۲۰^\circ = ۰/۳۴$ مشخص است، ابتدا $\cot ۲۰^\circ$ را به دست آورده و با استفاده از آن، اندازهٔ ضلع AC را محاسبه می‌کنیم:



$$۱+\cot^۲ ۲۰^\circ = \frac{۱}{\sin^۲ ۲۰^\circ} \Rightarrow ۱+\cot^۲ ۲۰^\circ = \frac{۱}{(۰/۳۴)^۲} = \frac{۱}{۰/۱۱۵۶} = ۸/۶۵$$

$$\Rightarrow \cot^۲ ۲۰^\circ = ۷/۶۵ \Rightarrow \cot ۲۰^\circ = \sqrt{۷/۶۵} = ۲/۷۶$$

$$\cot ۲۰^\circ = \frac{BC}{AC} \Rightarrow ۲/۷۶ = \frac{۲۰۰}{AC} \Rightarrow AC = \frac{۲۰۰}{۲/۷۶} = ۷۲/۳۱m$$