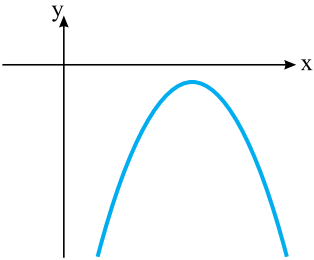




۱ معادله گویای $\frac{2x+9}{x^2-4} - \frac{6}{x^2-2x} = \frac{15}{x^2+2x}$ را حل کنید.

۲ شکل زیر نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ می‌باشد، علامت ضرایب b و c را تعیین کنید.



۳ معادله $\frac{6(x-1)}{x-2} = 3 - \frac{x-2}{3x-3}$ را حل کنید.

۴ اگر $x = 2$ یک جواب معادله $\frac{2x^2}{a+x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$ باشد:

الف a را تعیین کنید.

ب به ازای $a = 0$ ، ریشه این معادله را در صورت وجود به دست آورید.

معادله $\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x^2 - x - 2} = \sqrt{2x - 4}$ چند جواب دارد؟

۵

نقطه $N(5, -4)$ وسط پاره‌خط واصل بین دو نقطه A و $B(7, -2)$ است. مختصات نقطه A را بیابید.

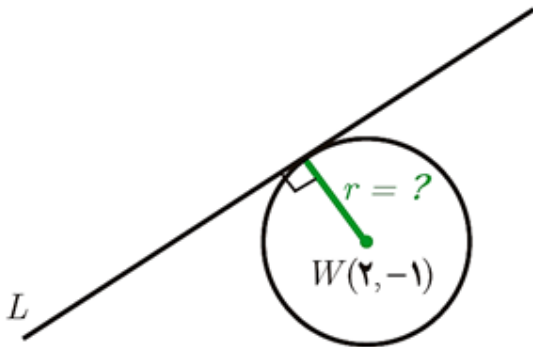
۶

محیط مستطیلی ۳۲ متر است. اندازه یکی از اضلاع آن را با x و مساحت آن را با S نشان می‌دهیم. به ازای چه مقداری از x ، مساحت مستطیل ماکزیمم می‌شود؟

۷

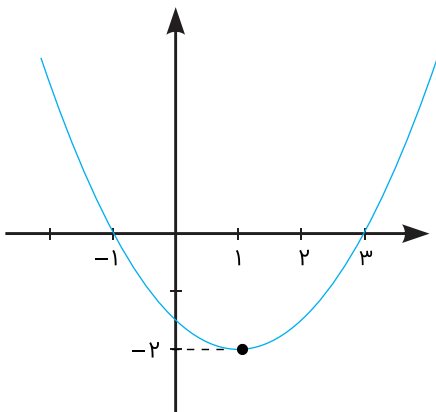
خط $L: 3x - 4y = 0$ بر دایره‌ای به مرکز $W(2, -1)$ مماس است. شعاع دایره را بیابید.

۸



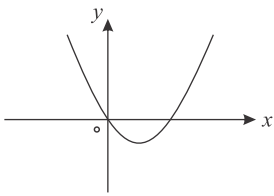
ضابطه سهمی زیر را مشخص کنید.

۹



شکل زیر نمودار تابع $P(x) = ax^2 + bx + c$ است.

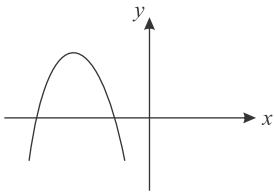
۱۰



الف علامت a و b را تعیین کنید.

۱۱ معادله خط L ، گذرا از دو نقطه $A(0, 7)$ و $B(3, 1)$ را بنویسید.

۱۲ در شکل زیر سهمی به معادله $p(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. علامت ضرایب a ، b و c و تعداد جوابهای معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را تعیین کنید.



۱۳ اگر یکی از ریشه‌های معادله $x^2 \cos \alpha + mx + \cos \alpha = 0$ برابر $\frac{1 + \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan \frac{\alpha}{2}}$ باشد، مقدار m را به دست آورید.

۱۴ ریشه‌های معادله زیر را به دست آورید.

$$\left(x + \frac{2}{x-3}\right)\left(1 - \frac{1}{x-2}\right) = 0$$

۱۵ معادله خطی را به دست آورید که بر خط $x = 3$ عمود است و از نقطه $(3, -2)$ می‌گذرد.

معادلات زیر را حل کنید.

$$2\sqrt{x} = \sqrt{3x + 9}$$

عدد صحیحی بیابید که مجموع جذر آن با جذر معکوسش برابر $\frac{10}{3}$ باشد.

معادله زیر را حل کنید.

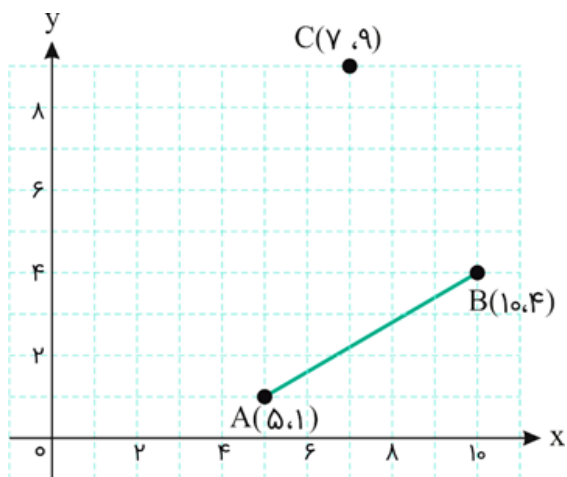
$$\sqrt{5x + 6} - \sqrt{x + 2} = 2$$

جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید:

قرینه نقطه $A(-2, 6)$ نسبت به نقطه $B(1, 2)$ برابر است.

در یکی از جاده‌های کشور تصادفی رخ داده است که مختصات نقطه تصادف روی نقشه مرکز امداد به صورت $P(50, 30)$ است. پایگاه‌های امداد هوایی که به محل تصادف نزدیک‌اند، در نقاط $A(10, -20)$ و $B(80, 90)$ واقع‌اند. شما کدام پایگاه را برای اعزام بالگرد امداد به محل حادثه پیشنهاد می‌کنید؟ (اعداد برحسب کیلومتر هستند)

مربع ABCD در ناحیه اول صفحه مختصات واقع است، به طوری که $A(5, 1)$ و $B(10, 4)$ دو رأس مجاور آن هستند.



الف شیب ضلع AB را بنویسید.

ب شیب ضلع AD را حساب کنید و معادله این ضلع را بنویسید.

پ اگر بدانیم نقطه $C(7, 9)$ رأس سوم مربع است، مختصات رأس D را بیابید و مربع را به طور کامل رسم کنید.

۲۲ نقاط $A(3, -2)$ و $B(-1, 2)$ و $C(6, 1)$ سه رأس یک مثلث هستند.

الف نشان دهید مثلث قائم‌الزاویه است.

۲۳ معادله $1 = \frac{x}{x+1} + \frac{3x+1}{x^2-1}$ را حل کنید.

۲۴ معادلات زیر را حل کنید.

$$x^6 - 3x^2 + 2 = 0$$

۲۵ مثلث با رأس‌های $A(1, 9)$ ، $B(3, 1)$ و $C(7, 11)$ را در نظر بگیرید.

۲۵

الف مثلث ABC را در دستگاه مختصات بکشید، سپس مختصات M ، نقطهٔ وسط ضلع BC را مشخص کنید.

الف

ب طول میانهٔ AM را محاسبه کنید.

ب

پ معادلهٔ میانهٔ AM را به دست آورید.

پ

۲۶ راکتی که به‌طور عمودی رو به بالا کشیده شده، t ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار می‌گیرد که معادله آن به‌صورت $h(t) = 100t - 5t^2$ است.

۲۶

الف چقدر طول می‌کشد تا راکت به بالاترین ارتفاع ممکن خود برسد؟

الف

ب ارتفاع نقطه اوج را بیابید.

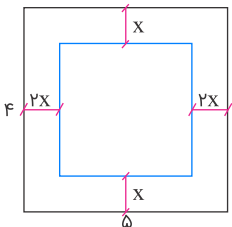
ب

پ چند ثانیه پس از پرتاب، راکت به زمین باز می‌گردد؟

پ

$$\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)^2 + 2\frac{(x+1)^2}{x} = 7$$

۲۸ مطابق شکل زیر در یک اتاق 4×5 یک فرش انداخته ایم. اگر مساحت قسمت بدون فرش اتاق ۱۱ متر مربع باشد، مقدار x را تعیین کنید.



۱ ابتدا مخرجها را تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{2x+9}{(x-2)(x+2)} - \frac{6}{x(x-2)} = \frac{15}{x(x+2)}$$

دو طرف را در $x(x-2)(x+2)$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x(2x+9) - 6(x+2) &= 15(x-2) \\ \Rightarrow 2x^2 + 9x - 6x - 12 - 15x + 30 &= 0 \\ \Rightarrow 2x^2 - 12x + 18 &= 0 \Rightarrow 2(x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

$x = 3$ مخرج کسرها را صفر نمی‌کند، پس قابل قبول است.

$$a < 0 \Rightarrow \text{سهمی رو به پایین}$$

$$c < 0 \Rightarrow \text{محل برخورد با محور } y$$

$$\text{راس سهمی} = \frac{-b}{2a} > 0 \xrightarrow{a < 0} b > 0$$

بنابراین: $a < 0$ (منفی)، $c < 0$ (منفی) و $b > 0$ (مثبت)

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{3x-3} + \frac{6(x-1)}{x-2} = 3 &\Rightarrow \frac{(x-2)^2 + (3x-3)(6x-6)}{(3x-3)(x-2)} = 3 \\ \Rightarrow \frac{x^2 - 4x + 4 + 18x^2 - 18x - 18x + 18}{3x^2 - 6x - 3x + 6} = 3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 19x^2 - 40x + 22 = 9x^2 - 27x + 18 \Rightarrow 10x^2 - 13x + 4 = 0$$

$$\Delta = (-13)^2 - 4(10)(4) = 169 - 160 = 9$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{9}}{2 \times 10} = \begin{cases} \frac{13+3}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} \\ \frac{13-3}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{\lambda}{a+2} + \frac{a-2}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{\lambda}{a+2} = \frac{2}{2} \Rightarrow a = 6$$

$$\frac{2x^2}{x} + \frac{-x}{x} = 0 \Rightarrow \frac{2x^2 - x}{x} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, x = 0 \text{ غ.ق.ق.}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x^2 - x - 2} &= \sqrt{2x - 4} \\ \Rightarrow \sqrt{(x-2)(x+2)} + \sqrt{(x-2)(x+1)} &= \sqrt{2(x-2)} \\ \Rightarrow \sqrt{(x-2)}(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}) &= \sqrt{(x-2)} \cdot \sqrt{2} \\ \xrightarrow{\text{یک ریشه } x=2 \text{ است}} (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}) &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2} x + 2 + 2\sqrt{x^2 + 3x + 2} + x + 1 = 2$$

$$2x + 1 = -2\sqrt{x^2 + 3x + 2} \xrightarrow{\text{به توان } 2} 4x^2 + 4x + 1 = 4x^2 + 12x + 8$$

$$\Rightarrow -7 = 8x \Rightarrow x = -\frac{7}{8} (*)$$

(*) این مقدار عبارت زیر رادیکال را منفی کند، پس این معادله فقط یک جواب ($x = 2$) دارد.

$$x_N = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 5 = \frac{x_A + 7}{2} \Rightarrow x_A = 3$$

$$y_N = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow -4 = \frac{y_A + (-2)}{2} \Rightarrow y_A = -6 \Rightarrow A(3, -6)$$

ابتدا ضابطه تابع مساحت را برحسب x می‌نویسیم. اگر محیط برابر با 32 باشد، مجموع طول و عرض مستطیل برابر با 16 می‌شود، پس اگر طول یکی از اضلاع x باشد، طول ضلع دیگر $16 - x$ است؛ بنابراین:

$$S(x) = x(16 - x) = -x^2 + 16x$$

چون ضریب x^2 منفی است، پس این سهمی دارای بیشترین مقدار است. کافی است طول رأس این سهمی را به دست آوریم:

$$x_S = -\frac{b}{2a} = \frac{-16}{-2} = 8$$

بنابراین بیشترین مقدار مساحت به ازای $x = 8$ به دست می‌آید.

خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطه تماس عمود است. فاصله مرکز دایره تا خط را به دست می‌آوریم:

$$r = \frac{|6 + 4|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

باتوجه به نمودار $3, -1, x = -1, 3$ صفرهای تابع می‌باشند و نقطه $(1, -2)$ رأس سهمی است.

$$\text{معادله سهمی } y = a(x+1)(x-3)$$

$$(1, -2) \Rightarrow -2 = a(2)(-2) \Rightarrow -4a = -2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}(x+1)(x-3)$$

الف $a > 0, b < 0$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 7}{3 - 0} = -2$$

$$y = -2x + h$$

$$B(3, 1): 1 = -2(3) + h \Rightarrow h = 7$$

البته اگر به مختصات نقطه $A(0, 7)$ از خط L دقت کنیم، بدون محاسبه متوجه می‌شویم که عرض از مبدأ این خط $h = 7$ است. پس:

$$L \text{ معادله خط } y = -2x + 7$$

$$a < 0, \quad b < 0, \quad c < 0$$

نمودار، محور طول‌ها را در دو نقطه قطع می‌کند در نتیجه معادله دو جواب دارد.

حاصل ضرب ریشه‌ها یعنی $\frac{c}{a}$ برابر ۱ است، پس ریشه دیگر را محاسبه می‌کنیم. فرض کنیم ریشه‌ها x_1 و x_2 باشند:

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} = 1 \Rightarrow \frac{1 + \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan \frac{\alpha}{2}} \times x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{1 - \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan \frac{\alpha}{2}}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{-m}{\cos \alpha} \Rightarrow \frac{1 + \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan \frac{\alpha}{2}} + \frac{1 - \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{-m}{\cos \alpha}$$

$$\frac{(1 + \tan \frac{\alpha}{2})^2 + (1 - \tan \frac{\alpha}{2})^2}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 + 2 \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2(\frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}})}{1 - \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{2}{\cos \alpha} = \frac{-m}{\cos \alpha}$$

$$\Rightarrow m = -2$$

$$\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3}\right)\left(\frac{x - 3}{x - 2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 2)} = 0 \Rightarrow x = 1$$

تذکر: $x = 2$ و $x = 3$ ریشه‌های معادله حساب نمی‌شوند، زیرا ریشه‌های مخرج هستند.

خط $x = 3$ موازی محور y ها است. پس خطی که عمود بر این خط است موازی محور x ها بوده و به صورت $y = a$ نوشته می‌شود. چون این خط $(y = a)$ از نقطه $(3, -2)$ می‌گذرد پس معادله‌اش به صورت $y = -2$ است.

پاسخ سؤال ۱۶

$$(2\sqrt{x})^2 = (\sqrt{3x+9})^2 \Rightarrow 4x = 3x + 9 \Rightarrow x = 9$$

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{10}{3}$$

$$\sqrt{x} = t$$

$$t + \frac{1}{t} = \frac{10}{3} \Rightarrow \frac{t^2 + 1}{t} = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow 3t^2 - 10t + 3 = 0 \Rightarrow t = 3 \text{ یا } \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9$$

$$\sqrt{5x+6} = 2 + \sqrt{x+2} \Rightarrow 5x+6 = 4+x+2+4\sqrt{x+2}$$

$$\Rightarrow 4x = 4\sqrt{x+2} \Rightarrow x = \sqrt{x+2} \Rightarrow x^2 = x+2$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ یا } x = 2$$

فقط $x = 2$ در معادله صدق می‌کند.

پاسخ سؤال ۱۹

$$A'(4, -2) \quad ۱۹$$

$$AP = \sqrt{(50-10)^2 + (30+20)^2} = \sqrt{40^2 + 50^2} = \sqrt{1600 + 2500} = \sqrt{4100}$$

$$BP = \sqrt{(10-50)^2 + (90-30)^2} = \sqrt{30^2 + 60^2} = \sqrt{900 + 3600} = \sqrt{4500}$$

پایگاه A چون به نقطه تصادف نزدیک‌تر است.

۲۱ الف

$$m_{AB} = \frac{4-1}{10-5} = \frac{3}{5}$$

ب

ضلع AD بر AB عمود است در نتیجه:

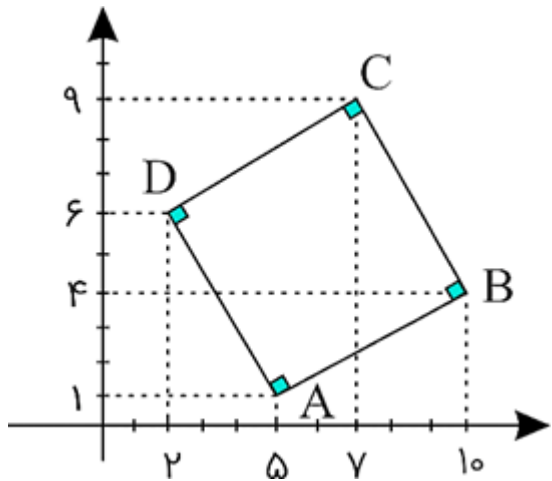
$$m_{AD} = \frac{-5}{3}$$

$$AD \text{ معادله: } y - 1 = \frac{-5}{3}(x - 5) \Rightarrow y = \frac{-5}{3}x + \frac{28}{3}$$

$$\left. \begin{aligned} m_{AD} &= \frac{y-1}{x-5} = \frac{-5}{3} \Rightarrow 3y - 3 = -5x + 25 \\ m_{CD} &= \frac{y-9}{x-7} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5y - 45 = 3x - 21 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3y + 5x = 28 \\ 5y - 3x = 24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9y + 15x = 84 \\ 25y - 15x = 120 \end{cases} \Rightarrow y = 6, x = 2 \Rightarrow D(2, 6)$$



$$A(3, -2), B(-1, 2), C(6, 1)$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (2 + 2)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(6 - 3)^2 + (1 + 2)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(6 + 1)^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \hat{A} B C : \text{ قائم الزاویه}$$

$$\begin{aligned} \frac{3x+1}{x^2-1} + \frac{x}{x+1} - 1 &= 0 \\ \Rightarrow \frac{3x+1}{x^2-1} + \frac{x(x-1)}{x^2-1} - \frac{x^2-1}{x^2-1} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{3x+1+x^2-x-x^2+1}{x^2-1} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{2x+2}{x^2-1} = 0 &\Rightarrow \begin{cases} 2x+2=0 \\ x^2-1 \neq 0 \end{cases} \\ \Rightarrow x = -1 &\Rightarrow \text{معادله ریشه ندارد} \Rightarrow \text{ریشه مخرج } -1 \end{aligned}$$

روش دوم:

$$\begin{aligned} \frac{3x+1+x^2-x}{x^2-1} = 1 &\Rightarrow x^2+2x+1 = x^2-1 \\ \Rightarrow x = -1 &\Rightarrow \text{معادله ریشه ندارد} \Rightarrow \text{ریشه مخرج } -1 \end{aligned}$$

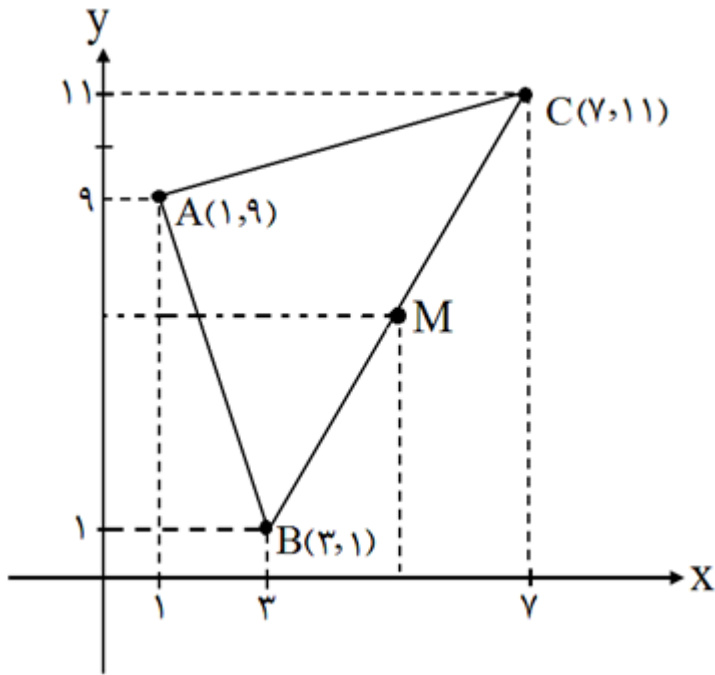
روش سوم:

$$\begin{aligned} (x^2-1) \left(\frac{3x+1}{x^2-1} + \frac{x}{x+1} \right) &= (x^2-1) \times 1 \\ \Rightarrow 3x+1+x^2-x &= x^2-1 \Rightarrow 2x = -2 \\ \Rightarrow x = -1 &\Rightarrow \text{معادله ریشه ندارد} \Rightarrow \text{ریشه مخرج } -1 \end{aligned}$$

۲۴ الف

$$\begin{aligned} x^k - 3x^2 + 2 &= 0 \\ x^k = k &\Rightarrow k^2 - 3k + 2 = 0 \Rightarrow (k-2)(k-1) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} k = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ k = 1 \Rightarrow x^1 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases} \end{aligned}$$

۲۵



$$M\left(\frac{\gamma + 3}{2}, \frac{11 + 1}{2}\right) = M(\omega, \epsilon)$$

$$AM = \sqrt{(\omega - 1)^2 + (\epsilon - 9)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$m_{AM} = \frac{9 - \epsilon}{1 - \omega} = \frac{-3}{4} \Rightarrow y - \epsilon = \frac{-3}{4}(x - \omega) \Rightarrow y = \frac{-3}{4}x + \frac{39}{4}$$

$$t_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{-10} = 10 \text{ s}$$

$$h(10) = 100(10) - 5(10)^2 = 1000 - 500 = 500 \text{ m}$$

$$h = 0 \Rightarrow 100t - 5t^2 = 0$$

$$\Rightarrow 5t(20 - t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \text{ ق ق} \\ t = 20 \text{ ق ق} \end{cases}$$

ب

پ

الف ۲۶

ب

پ

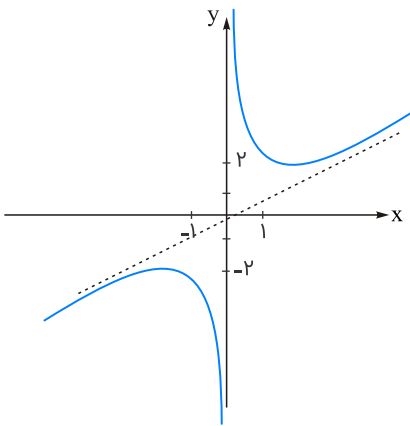
$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 + 2\frac{(x+1)^2}{x} = 7 &\Rightarrow \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{x^2+2x+1}{x}\right) = 7 \\ \Rightarrow \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{x^2+1}{x} + 2\right) = 7 &\Rightarrow \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{x^2+1}{x}\right) + 4 = 7 \\ \Rightarrow \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = 3 &\Rightarrow \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{x^2+1}{x}\right) - 3 = 0 \end{aligned}$$

عبارت $t = \frac{x^2+1}{x}$ را در نظر می‌گیریم:

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow (t-1)(t+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{x} = -3 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -3 \Rightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \\ \frac{x^2+1}{x} = 1 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow \text{ریشه ندارد} \end{cases}$$

نمودار تابع $f(x) = x + \frac{1}{x}$ به صورت زیر است:



معادله $f(x) = x + \frac{1}{x}$ همواره بزرگتر مساوی ۲ یا کوچکتر مساوی -۲ است.

باتوجه به شکل ابعاد فرش برابر $5 - 4x$ و $4 - 2x$ است.

مساحت اتاق ۲۰ متر مربع است، پس مساحت فرش برابر است با: $20 - 11 = 9 \text{ m}^2$

$$S = (5 - 4x)(4 - 2x) = 9 \Rightarrow 8x^2 - 26x + 20 = 9 \Rightarrow 8x^2 - 26x + 11 = 0$$

$$x = \frac{26 \pm \sqrt{324}}{16} = \frac{26 \pm 18}{16} \Rightarrow x = 0.5 \text{ m}, x = \frac{11}{4} \text{ غقق}$$