

جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

۱. انتهای کمان ۲ رادیان در ناحیه ..... مثلثاتی قرار دارد.

۲. انتهای کمان نظیر هریک از زوایای زیر، در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار دارد؟

۲ رادیان  $\frac{6\pi}{5}$

۳ رادیان  $\frac{2\pi}{3}$

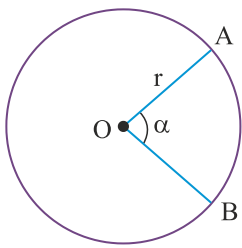
۴ رادیان  $-\frac{\pi}{18}$

۵ رادیان ۷

۶ رادیان - ۸

۷. اگر A و B به ترتیب اندازه یک زاویه برحسب درجه و رادیان باشند و داشته باشیم  $3A = 104 + \frac{72}{\pi}B$ ، زاویه A چند درجه است؟

۸. باتوجه به شکل زیر، اگر  $\alpha$  برحسب رادیان باشد، نشان دهید:



$$AB = r \cdot \alpha \quad \text{الف}$$

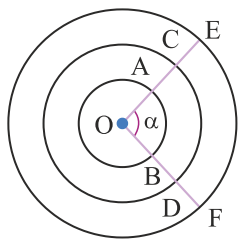
$$S_{AOB} = \frac{1}{2} r^2 \alpha \quad \text{ب (قطع دایره) } \alpha$$

ب فرمول‌های قسمت اول را بر حسب  $\alpha^\circ$  بنویسید.

جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید.

۹ یک رادیان در هر دایره دلخواه، اندازه زاویه مرکزی است که طول کمان روبه‌رو به آن برابر طول ..... است.

سه دایره به مرکز O و شعاع‌های ۲ و ۳ و ۴ سانتی‌متر مطابق شکل زیر رسم شده است. در سه حالت  $\alpha = 40^\circ$ ,  $\alpha = 60^\circ$  و  $\alpha = \theta^\circ$  جدول زیر را کامل کنید. چه نتیجه‌ای از جدول می‌گیرید؟



$\alpha$ (رادیان)	$\widehat{AB}$ (cm)	$\widehat{CD}$ (cm)	$\widehat{EF}$ (cm)	$\frac{\widehat{AB}}{OA}$	$\frac{\widehat{CD}}{OC}$	$\frac{\widehat{EF}}{OE}$

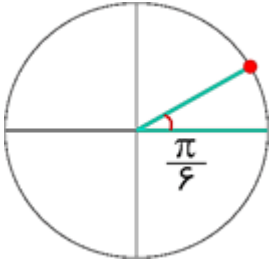
۱۱ اگر اندازه یک زاویه برحسب درجه،  $105^\circ$  کاهش یابد، اندازه زاویه برحسب رادیان، نصف می‌شود. اندازه زاویه چند رادیان است؟

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. (✓ و ×)

۱۲ انتهای کمان زاویه  $\frac{6\pi}{5}$  رادیان در ربع سوم دایره مثلثاتی قرار دارد.

۱۳ طول برفپاک‌کن عقب اتومبیلی ۲۴ سانتی‌متر است. اگر برفپاک‌کن، کمانی به اندازه  $۱۲۰^\circ$  طی کند، طول کمان طی‌شده توسط نوک برفپاک‌کن چند سانتی‌متر است؟ ( $\pi \simeq ۳/۱۴$ )

۱۴ انتهای کمان نظیر زاویه  $\frac{\pi}{6}$  را بر روی دایره مثلثاتی زیر مشخص کرده‌ایم. دو مورد دیگر از زوایایی را مثال بزنید که انتهای کمان آن‌ها هم، با انتهای کمان  $\frac{\pi}{6}$  یکی باشد (یکی از آن زوایا، زاویه‌ای منفی باشد).



زوایایی که مقدار  $\cos$  آن‌ها منفی است را مشخص کنید (با ذکر دلیل).

۱۵  $\frac{3\pi}{4}$

۱۶  $۴۴۰^\circ$

۱۷  $-\frac{2\pi}{3}$

۱۸  $۴۰۰^\circ$

۱۹ اگر  $\alpha = ۱۲$  رادیان باشد، انتهای کمان در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

پاسخ سؤال ۱

ناحیه دوم ۱

پاسخ سؤالات ۲ تا ۶

ناحیه سوم ۲

ناحیه دوم ۳

در ناحیه چهارم ۴

۵ از آنجاکه  $1 \text{ rad} \simeq 57^\circ$  است، در نتیجه:  $7 \text{ rad} = 399$ ، پس در ناحیه اول قرار دارد.

۶ از آنجاکه  $1 \text{ rad} \simeq 57^\circ$  است، در نتیجه:  $-8 \text{ rad} = -456$ ، پس در ناحیه سوم قرار دارد.

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{A}{180} = \frac{B}{\pi} \Rightarrow B = \frac{\pi A}{180}$$

$$3A = 104 + \frac{72}{\pi} \times \frac{\pi A}{180}$$

$$\Rightarrow 3A - \frac{2A}{5} = 104 \Rightarrow A = 40^\circ$$

۸ الف به وسیله یک تناسب ساده فرمولها به دست می‌آیند.

اگر  $\alpha = 2\pi$  باشد، محیط دایره برابر با  $2\pi r$  است، اگر  $\alpha$  زاویه برحسب رادیان باشد، طول کمان  $AB$  برابر است با:

$$\frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi r}{AB} \Rightarrow AB = r \cdot \alpha$$

اگر  $\alpha = 2\pi$  باشد، مساحت دایره برابر با  $\pi r^2$  است، اگر  $\alpha$  زاویه برحسب رادیان باشد، مساحت قطاع برابر است با:

$$\frac{2\pi}{\alpha} = \frac{\pi r^2}{S} \Rightarrow S = \frac{1}{2} r^2 \cdot \alpha$$

ب از فرمول  $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$  استفاده می‌کنیم. اگر  $R = \alpha$  آنگاه:

$$\frac{\alpha^\circ}{180} = \frac{\alpha}{\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi \alpha^\circ}{180} \Rightarrow AB = \frac{r \pi \alpha^\circ}{180}, S = \frac{1}{2} r^2 \frac{\pi \alpha^\circ}{180} = \frac{\pi r^2}{360} \alpha^\circ$$

یک رادیان در هر دایره دلخواه، اندازه زاویه مرکزی است که طول کمان روبه‌رو به آن برابر طول شعاع دایره است.

می‌دانیم  $\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180}$ ؛ پس:

$$\frac{R}{\pi} = \frac{40}{180} \Rightarrow R = \frac{2\pi}{9}$$

$$\frac{R}{\pi} = \frac{60}{180} \Rightarrow R = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{R}{\pi} = \frac{\theta}{180} \Rightarrow R = \frac{\pi\theta}{180}$$

محیط دایره کوچک‌تر برابر است با:

$$2\pi r = 2\pi(2) = 4\pi$$

سهم زاویه  $40^\circ$ ،  $\frac{1}{9}$  محیط دایره است پس:

$$\widehat{AB} = \frac{4\pi}{9}$$

به همین ترتیب طول کمان CD و EF هم محاسبه می‌شود.

محیط دایره وسط برابر است با  $2\pi r = 2\pi(3) = 6\pi$  و سهم زاویه  $60^\circ$ ،  $\frac{1}{3}$  محیط دایره است؛ پس:

$$\widehat{AB} = \frac{6\pi}{9}$$

و به همین ترتیب جدول به‌صورت زیر خواهد شد.

$\alpha$ (رادیان)	$\widehat{AB}$	$\widehat{CD}$	$\widehat{EF}$	$\frac{\widehat{AB}}{OA}$	$\frac{\widehat{CD}}{OC}$	$\frac{\widehat{EF}}{OE}$
$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{6\pi}{9}$	$\frac{2\pi r}{9}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{2\pi}{9}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{6}$	$\frac{6\pi}{6}$	$\frac{2\pi r}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi\theta}{180}$	$\frac{4\pi\theta}{360}$	$\frac{6\pi\theta}{360}$	$\frac{2\pi r\theta}{360}$	$\frac{2\pi\theta}{360}$	$\frac{2\pi\theta}{360}$	$\frac{2\pi\theta}{360}$

نتیجه: در تمام حالات (L) طول کمان مقابل به  $\alpha$  (برحسب رادیان) به شعاع دایره برابر با  $\alpha$  است؛ یعنی:

$$L = r \cdot \alpha$$

در ردیف آخر هم  $\theta = \frac{2\pi\theta}{360}$  است.

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

$$\frac{D - 105}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{D - 105}{180} = \frac{R}{2\pi} = \frac{D}{2 \times 180} \Rightarrow 2D - 210 = D \Rightarrow D = 210^\circ$$

$$\frac{210}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{21\pi}{18} = \frac{7\pi}{6}$$

روش دوم:

وقتی اندازه زاویه برحسب رادیان نصف شود، اندازه زاویه برحسب درجه نیز نصف می‌شود؛ پس:

$$D - 105^\circ = \frac{D}{2} \Rightarrow \frac{D}{2} = 105^\circ \Rightarrow D = 210^\circ = \frac{7\pi}{6}$$

پاسخ سؤال ۱۲

درست

۱۲

۱۳

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{120}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{2\pi}{3} \text{ رادیان}$$

$$\theta = \frac{L}{r} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{L}{24} \Rightarrow L = 16\pi = 16(3/14) = 50/24 \text{ cm}$$

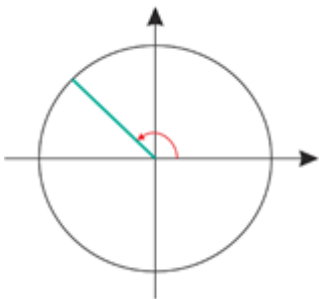
۱۴ دو زاویه در صورتی انتهای کمانشان باهم یکی است که اختلاف اندازه‌هایشان مضربی از  $360^\circ$  باشد. برای پیدا کردن زوایای هم‌انتها باید زاویه  $30^\circ$  را با مضارب  $360^\circ$  جمع یا تفریق می‌کنیم:

$$30^\circ + 360^\circ = 390^\circ$$

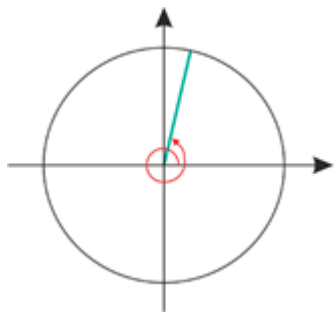
$$30^\circ - 360^\circ = -330^\circ$$

پاسخ سؤالات ۱۵ تا ۱۸

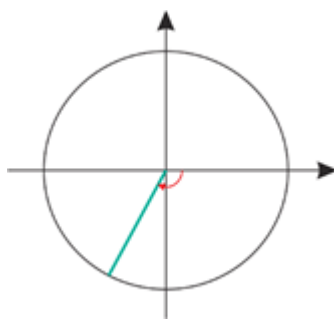
۱۵ زاویه  $\frac{3\pi}{4}$  در ناحیه دوم قرار دارد، پس:  $\cos \frac{3\pi}{4} < 0$



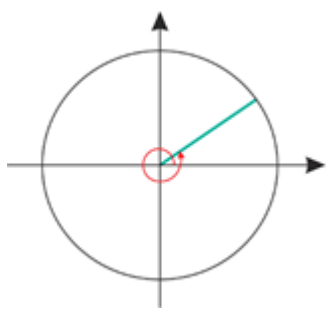
زاویه  $۴۴^\circ = ۳۶^\circ + ۸^\circ = ۲\pi + ۸^\circ$  در ناحیه اول است، در نتیجه:  $\cos ۴۴^\circ > ۰$



زاویه  $-\frac{۷\pi}{۳}$  در ناحیه سوم قرار دارد، در نتیجه:  $\cos(-\frac{۷\pi}{۳}) < ۰$



زاویه  $۴۰۰^\circ = ۲\pi + ۴۰^\circ$  در ناحیه اول قرار دارد، در نتیجه:  $\cos ۴۰۰^\circ > ۰$



$$۱۲ \left| \frac{۶/۲۸}{۱} \right.$$

$$\frac{۶/۲۸}{۵/۷۲}$$

دور کامل دایره:  $۲\pi = ۶/۲۸$  رادیان

