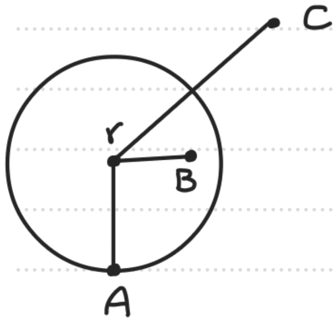
دایره: مکان هندسی (مجموعه نقاط) از صفحه که از نقطه ثابت O به فاصله مشخص r قرار دارند.

دایره $C(O,r)$ دایره‌ای به مرکز O و شعاع r است.

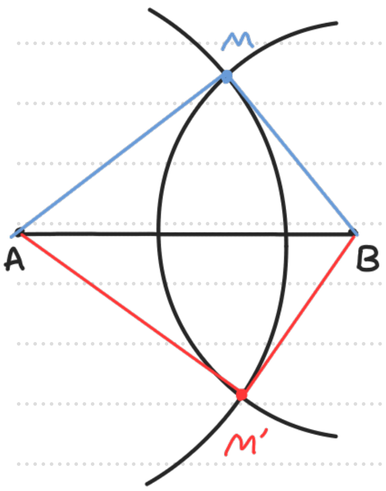


A روی محیط دایره — $OA = r$

B درون دایره — $OB < r$

C بیرون دایره — $OC > r$

نقاط A و B به فاصله 5 واحد از یکدیگر هستند. نقاطی را بیابید که فاصله آنها از A، 4 واحد و از B، 3 واحد باشد. نقاط M و M'



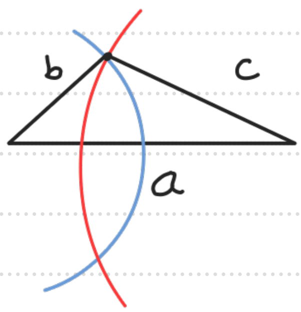
$AM = 4$
$BM = 3$

$AM' = 4$
$BM' = 3$

دهانه پرگار را به اندازه 4 واحد باز می‌کنیم و از نقطه A کمان می‌زنیم سپس دهانه پرگار را به اندازه 3 واحد باز می‌کنیم و کمان می‌زنیم نقاط برخورد دو کمان پاسخ مسئله است

مثلثی با طول اضلاع a و b و c رسم کنید.

① رسم پاره خطی بطول a ② کمان به طول b از یک سر پاره خط a ③ کمان بطول c از سر دیگر پاره خط a



برای تشکیل مثلث بطول اضلاع a و b و c باید شرایط زیر برقرار باشد:

$a+b>c$ (یعنی جمع هر دوتایی که در نظر می‌گیری از سومی بیشتر باشه)

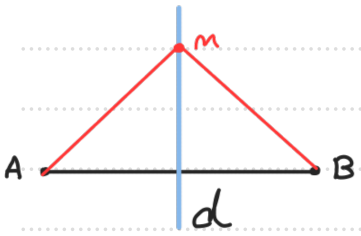
$a+c>b$

$b+c>a$ مثلثی بطول اضلاع 3 و 2 و 1 تشکیل نمی‌شود چون $1+2>3$

ویژگی عمود منصف یک پاره خط : هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر پاره خط به یک فاصله است.

خط d عمود منصف پاره خط AB

پس $AM = BM$



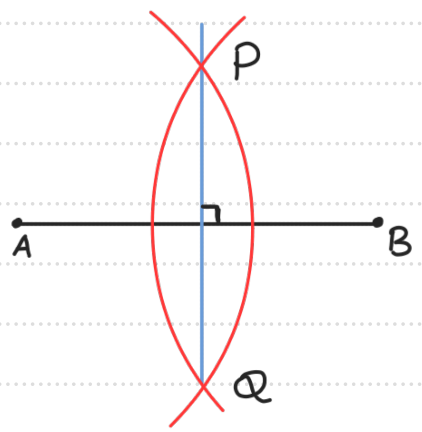
روش رسم عمود منصف یک پاره خط :

① دهانه پرگار را به اندازه بیشتر از نصف از پاره خط AB باز می‌کنیم

② از راس A کمان می‌زنیم

③ با همان اندازه از راس B هم کمان می‌زنیم

④ نقاط برخورد کمان ها را بهم وصل می‌کنیم. (P و Q)

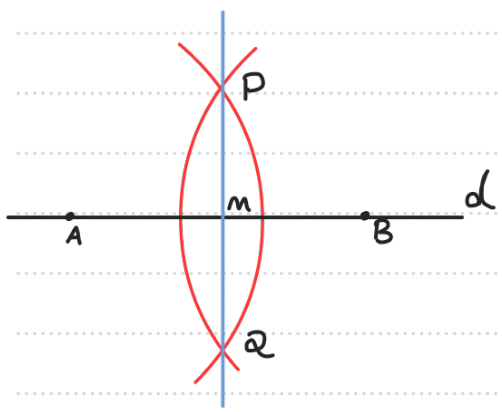


روش رسم خط عمود بر یک خط از نقطه ای روی آن :

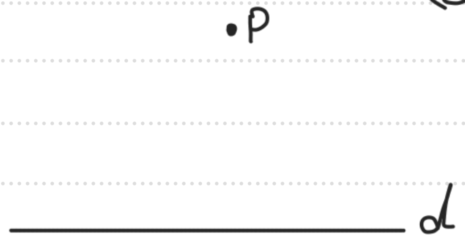
① نقطه A و B را طوری در نظر بگیرید که فاصله شان تا M برابر باشد $(AM = BM)$

② رسم عمود منصف پاره خط AB

این خط هم از M می‌گذرد و هم بر خط d عمود است.

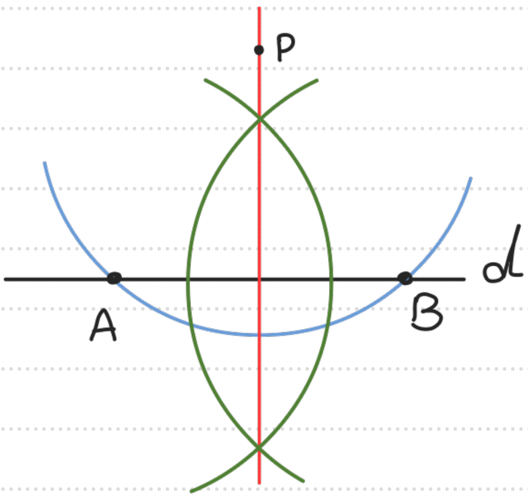


رسم خط عمود بر یک خط از نقطه ای غیر واقع بر آن (بیرون خط)

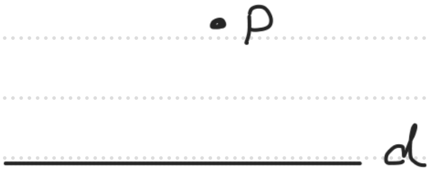


① رسم کمان به مرکز P و شعاع دلخواه (طوریکه خط d را در دو نقطه (A و B) قطع کند)

② رسم عمود منصف پاره خط AB



رسم خط موازی با خط داده شده از نقطه ای غیر واقع بر آن

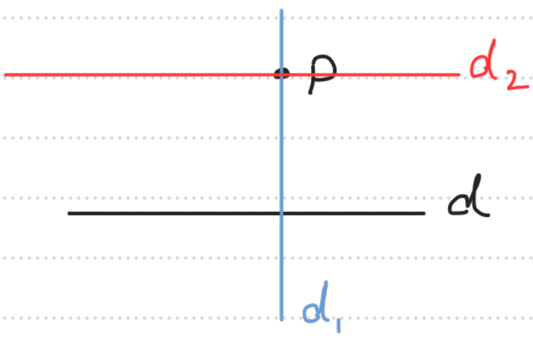


① رسم خط d_1 گذرنده از P و عمود بر خط d

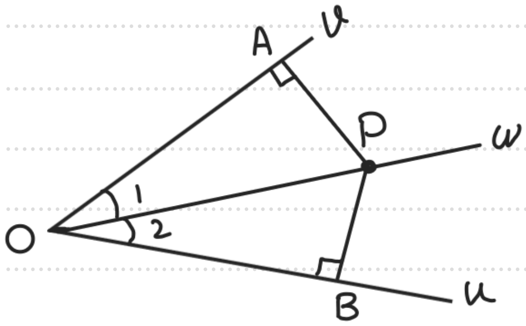
② رسم خط d_2 گذرنده از P و عمود بر خط d_1

خط d_2 با d موازی است.

$d_2 \parallel d$



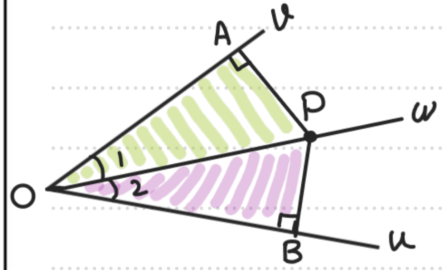
هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و برعکس.



$AP = BP \iff$ P روی نیمساز O

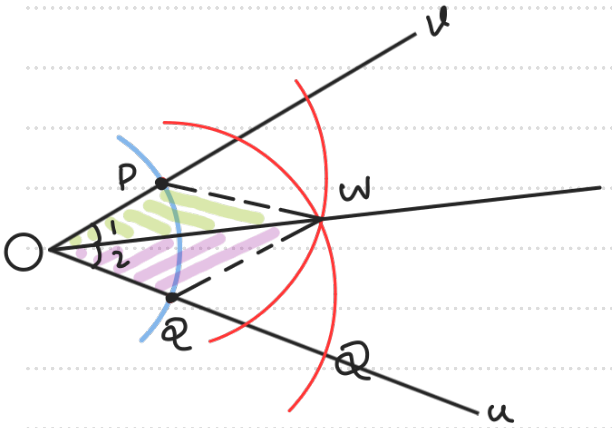
$O_1 = O_2$

ثابت کنید فاصله نقطه P روی نیمساز زاویه $u\hat{O}v$ ، از دو ضلع آن برابر است.



$$\begin{cases} OP = OP & \text{ضلع مشترک} \\ \hat{A} = \hat{B} = 90 \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و زاویه}} \overset{\triangle}{OAP} \cong \overset{\triangle}{OBP} \xrightarrow[\text{اجزا}]{\text{سایر}} AP = BP$$

رسم نیمساز یک زاویه



① به مرکز O و شعاع دلخواه کمان می‌زنیم (تا نقاط A و B پیدا شوند)

② کمانی به شعاع بیش از نصف پاره خط PQ به مرکز P

و بار دیگر به مرکز Q رسم می‌نمیم تا یکدیگر را در نقطه W قطع کنند.

OW نیمساز زاویه $u\hat{O}v$ است.

$$\begin{cases} OW & \text{مشترک} \\ PW = QW \\ OP = OQ \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\triangle}{OPW} \cong \overset{\triangle}{OQW} \xrightarrow{\text{سایر اجزا}} \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

پس OW نیمساز است.

نسبت و تناسب

① طرفین وسطین

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Longleftrightarrow ad=bc$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow{\times bd} \frac{a}{b}\times bd=\frac{c}{d}\times bd \Longrightarrow ad=bc$$

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6} \qquad 2\times 6=3\times 4$$

② عوض کردن جای طرفین یا وسطین :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d} \quad \text{یا} \quad \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow{\times \frac{b}{c}} \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow{\times \frac{d}{a}} \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6} \longrightarrow \frac{2}{4}=\frac{3}{6} \quad \text{یا} \quad \frac{4}{2}=\frac{6}{3}$$

③ معکوس تناسب

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Longleftrightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow[\text{تعویض } a,d]{\text{طبق } ②} \frac{d}{b}=\frac{c}{a} \xrightarrow[\text{تعویض } c,b]{\text{طبق } ②} \frac{d}{c}=\frac{b}{a}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6} \Longleftrightarrow \frac{3}{2}=\frac{6}{4}$$

④ ترکیب نسبت در صورت

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow{+1} \frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{a}{b}+\frac{b}{b}=\frac{c}{d}+\frac{d}{d} \rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6} \longrightarrow \frac{2+3}{3}=\frac{4+6}{6} \longrightarrow \frac{5}{3}=\frac{10}{6} \checkmark$$

④' ترکیب نسبت در مخرج

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{b}{a}=\frac{d}{c} \xrightarrow{+1} \frac{b}{a}+1=\frac{d}{c}+1 \rightarrow \frac{b}{a}+\frac{a}{a}=\frac{d}{c}+\frac{c}{c} \rightarrow \frac{b+a}{a}=\frac{d+c}{c}$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{a}{b+a}=\frac{c}{d+c}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6} \longrightarrow \frac{2}{3+2}=\frac{4}{6+4} \longrightarrow \frac{2}{5}=\frac{4}{10} \checkmark$$

5) تفضیل در صورت:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow{-1} \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{a}{b}-\frac{b}{b}=\frac{c}{d}-\frac{d}{d} \to \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6} \longrightarrow \frac{2-3}{3}=\frac{4-6}{6} \longrightarrow \frac{-1}{3}=\frac{-2}{6} \checkmark$$

5') تفضیل در مخرج

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{b}{a}=\frac{d}{c} \xrightarrow{-1} \frac{b}{a}-1=\frac{d}{c}-1 \to \frac{b}{a}-\frac{a}{a}=\frac{d}{c}-\frac{c}{c} \to \frac{b-a}{a}=\frac{d-c}{c}$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6} \longrightarrow \frac{2}{3-2}=\frac{4}{6-4} \longrightarrow \frac{2}{-1}=\frac{4}{-2}$$

استدلال استقرایی:

استدلالی که در آن با مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت، نتیجه‌ای کلی از آن گرفته می‌شود؛ یعنی «از جزء به کل می‌رسیم»، استدلال استقرایی نامیده می‌شود.

استدلال استنتاجی:

استدلالی است که براساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایهٔ واقعیت‌هایی که درستی آنها را پذیرفته‌ایم، بیان می‌شود.

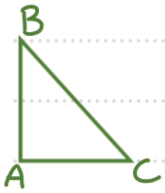
برخی نتایج مهم و پرکاربرد که با استدلال استنتاجی بدست می‌آیند، قضیه نامیده می‌شوند.

عکس قضیه:

اگر فرض و حکم یک قضیه را جابجا کنیم، آنچه حاصل می‌شود «عکس قضیه» است.

* نکته: عکس یک قضیه می‌تواند درست یا نادرست باشد.

قضیه:



اگر مثلث ABC، در راس A قائمه باشد داریم: $AB^2+AC^2=BC^2$

عکس قضیه:

اگر در مثلث ABC، رابطهٔ $AB^2+AC^2=BC^2$ برقرار باشد، این مثلث در راس A قائمه است.

قضیه دوشرطی:

اگر قضیه و عکس قضیه درست باشند به آن قضیهٔ دوشرطی می‌گویند.

برهان خلف (برهان غیرمستقیم):

در برهان خلف بجای اینکه بطور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم درست نباشد (فرض خلف) و سپس به یک تناقض یا یک نتیجه غیرممکن می‌رسیم و به این ترتیب فرض خلف باطل و درستی حکم ثابت می‌شود.

اگر $n \in \mathbb{N}$ و n^2 عددی فرد باشد، آنگاه n نیز عددی فرد است.

حل: با استفاده از برهان خلف فرض کنیم حکم مسئله نادرست باشد؛ یعنی n عددی فرد نباشد پس n عددی زوج است و می‌توان نوشت $n=2k$ $(k \in \mathbb{N})$. پس $n^2=(2k)^2=4k^2=2(2k^2)$

یعنی n^2 زوج است ولی طبق فرض مسئله n^2 فرد است یعنی با فرض مسئله در تناقض است؛ پس از ابتدا n نمی‌توانست عددی زوج باشد پس n فرد است.

در برخی مواقع عدم درستی یک گزاره را می‌توان با یک مثال نشان داد.

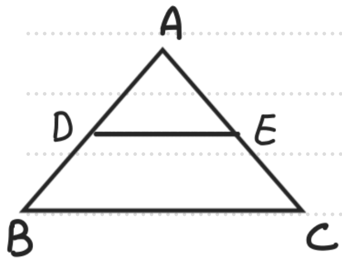
مثال نقض:

به مثالی که نشان دهد ارزش یک حکم نادرست است، مثال نقض می‌گویند.

مجموع هر دو عدد اول، زوج است.

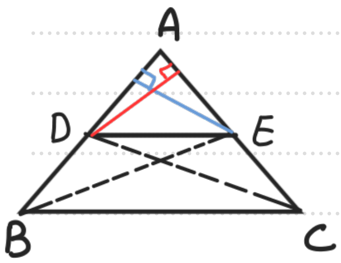
مثال نقض: 5 و 2 . مجموع این دو عدد اول زوج نیست . (7 زوج نیست)

قضیه تالس:



$$DE \parallel BC \Longrightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$$

اثبات: از نقطه D به C و از E به B وصل می‌کنیم.



مساحت مثلث‌های $D\hat{E}C$ و $D\hat{E}B$ برابرند: چون قاعده هردو ED و

ارتفاع وارد بر قاعده هردو مثلث برابر است.

از نقطه E بر ضلع AB عمود می‌کنیم و پای عمود را H_1 می‌نامیم و

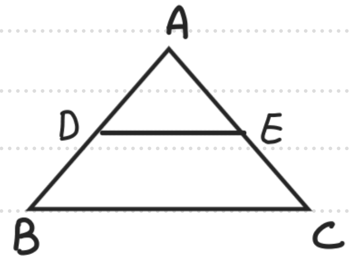
از D نیز به ضلع AC عمود می‌کنیم و پای عمود را H_2 می‌نامیم.

$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEB}} = \frac{\frac{1}{2} EH_1 \times AD}{\frac{1}{2} EH_1 \times DB} = \frac{AD}{DB} \quad (I)$$

$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEC}} = \frac{\frac{1}{2} DH_2 \times AE}{\frac{1}{2} DH_2 \times EC} = \frac{AE}{EC} \quad (II)$$

$$S_{DEB} = S_{DEC} \quad (III)$$

از I و II و III نتیجه می‌شود: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

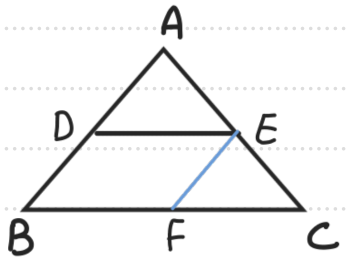


تعمیم قضیه تالس:

$DE \parallel BC \longrightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

اثبات:

طبق قضیه تالس می‌دانیم $\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{EC} \xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب صورت}} \frac{AD}{AD+BD}=\frac{AE}{AE+EC}$



$\longrightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ (I)

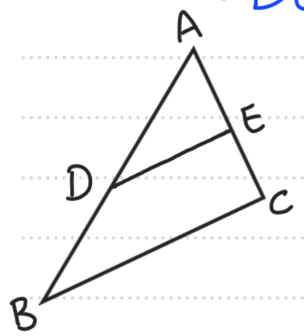
پاره خط EF را موازی AB رسم می‌کنیم.

$EF \parallel AB \longrightarrow \frac{BF}{BC}=\frac{AE}{AC}$ (II)

از (I) و (II) نتیجه می‌گیریم: $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

عکس قضیه تالس:

مانند شکل مقابل در مثلث ABC، اگر $\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}$ آنگاه $DE \parallel BC$.



اثبات: با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم حکم مسئله غلط باشد

یعنی $DE \nparallel BC$. از نقطه D خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AC را

در نقطه‌ای مانند E' قطع کند. طبق قضیه تالس داریم $\frac{AE'}{E'C}=\frac{AD}{DB}$ و با مقایسه با فرض داریم: $\frac{AE}{EC}=\frac{AE'}{E'C}$

با ترکیب نسبت در مخرج داریم: $\frac{AE}{AE+EC}=\frac{AF}{AF+FC} \Rightarrow \frac{AE}{AC}=\frac{AF}{AC} \Rightarrow AE=AF$

پس F و E برهم منطبق هستند که نادرست است. پس فرض خلف باطل است و $DE \parallel BC$ است.