۱

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۴ & x<-۲ \\ -(x^{۲}-۴) & -۲\le x\le ۲ \\ x^{۲}-۴ & x>۲ \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} ۲x & x<-۲ \\ -۲x & -۲<x<۲ \\ ۲x & x>۲ \end{cases}$$

$$f'_{+}(۲)=۴, f'_{-}(۲)=-۴, f'_{+}(-۲)=۴, f'_{-}(-۲)=-۴$$

لذا چون $f'_{-}(۲)\neq f'_{+}(۲)$ و $f'_{-}(-۲)\neq f'_{+}(-۲)$ لذا تابع در نقاط $x=۲$ و $x=-۲$ مشتق‌پذیر نیست.

۲ تابع f در $x=-۱$ پیوسته است. (۰/۲۵)

$$f'_{+}(-۱)=\underbrace{\lim_{x\to(-۱)^{+}}\frac{|x^{۲}+x|}{x+۱}}_{(۰/۲۵)}=\lim_{x\to(-۱)^{+}}\frac{-x(x+۱)\,(۰/۲۵)}{x+۱}=۱\ (۰/۲۵)$$

$$f'_{-}(-۱)=\lim_{x\to(-۱)^{-}}\frac{x(x+۱)(۰/۲۵)}{x+۱}=-۱(۰/۲۵)$$

مشتق‌های راست و چپ تابع هر دو متناهی ولی نابرابرند. (۰/۲۵) پس $x=-۱$ نقطه گوشه‌ای تابع است.

۳

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x-۲}}\Rightarrow D_{f'}=(۲,+\infty)$$

۰/۲۵ ۰/۲۵

۴

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\geqslant ۰ \\ -x^{۲} & x<۰ \end{cases}$$

$$f'_{+}(۰)=\lim_{x\to۰^{+}}\frac{۲x-۰}{x-۰}=۲\ ۰/۲۵,\ f'_{-}(۰)=\lim_{x\to۰^{-}}\frac{-۲x-۰}{x-۰}=-۲\ ۰/۲۵$$

مشتق دوم در نقطه‌ی صفر وجود ندارد ۰/۲۵

$$f'_{+}(۰)=\lim_{x\to۰^{+}}\frac{x^{۲}-۰}{x-۰}=۰\quad ۰/۲۵$$

$$f'_{-}(۰)=\lim_{x\to۰^{-}}\frac{-x^{۲}-۰}{x-۰}=۰\quad ۰/۲۵$$

۵ الف) خیر - چون ناپیوسته است.

ب) بله، در تمام نقاط بازه $(-\infty,۲)$ مشتق‌پذیر است.

ب) $x\ge ۲: f(x)=\sqrt{x-۱}+۲\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x-۱}}\Rightarrow f'_{+}(۲)=\frac{۱}{۲}$

۶ باید درون قدرمطلق درجه یک باشد تا در نقطه مشتق‌ناپذیر باشد. بنابراین:

$a-۱=۰ \Rightarrow a=۱ \Rightarrow f(x)=|۴x-۱|$

در این حالت ریشه درون قدرمطلق نقطه مشتق‌ناپذیری است.

$۴x-۱=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{۴} \Rightarrow y=۰ \Rightarrow A\left(\frac{۱}{۴},۰\right)$

تابع در $A\left(\frac{۱}{۴},۰\right)$ مشتق‌ناپذیر است.

۷ باید درون قدرمطلق $\Delta>۰$ باشد تا در دو نقطه مشتق‌ناپذیر باشد. بنابراین:

$\Delta>۰ \Rightarrow b^۲-۴ac>۰ \Rightarrow k^۲-۴>۰ \Rightarrow k<-۲$ یا $k>۲$

۸ باید درون قدرمطلق $\Delta \leqslant ۰$ باشد تا در R مشتق‌پذیر باشد. بنابراین:

$\Delta \leqslant ۰ \Rightarrow b^۲-۴ac \leqslant ۰ \Rightarrow m^۲-۴(۴) \leqslant ۰$

$\Rightarrow m^۲-۱۶ \leqslant ۰ \Rightarrow -۴ \leqslant m \leqslant ۴$

۹ تابع در $x=۱$ پیوسته است.

$$f'_+(۱)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۲+۱-۲}{x-۱}=۲,\ f'_-(۱)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{۳x-۱-۲}{x-۱}=۳$$

$f'_+(۱)\neq f'_-(۱)$ پس تابع در $x=۱$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

۱۰ تابع f در نقطه $x=۰$ پیوسته است.

$$\left.\begin{array}{l} f'_+(۰)=۳ \\ f'_-(۰)=a \end{array}\right\} \Rightarrow a=۳$$

۱۱ تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

$$\left.\begin{array}{l} f'_+(۲)=\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{|۲x-۴|}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{۲(x-۲)}{x-۲}=۲ \\ f'_-(۲)=\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{|۲x-۴|}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{-۲(x-۲)}{x-۲}=-۲ \end{array}\right\} \Rightarrow f'_+(۲)\neq f'_-(۲)$$

۱۲ $f'(-۱)$ موجود نیست.

$$\left.\begin{array}{l} f'_+(-۱)=\lim\limits_{x\to (-۱)^+}\frac{x+۲-۱}{x+۱}=۱ \\ f'_-(-۱)=\lim\limits_{x\to (-۱)^-}\frac{x^۲-۱}{x+۱}=-۲ \end{array}\right\} \Rightarrow f'_+(-۱)\neq f'_-(-۱)$$

۱۳

$$f'(x)=\underbrace{۲\sin x\cos x}_{\sin ۲x}+۲\sin ۲x=۳\sin ۲x \Rightarrow f''(x)=۶\cos ۲x$$

الف) $f''\left(\frac{\pi}{۶}\right)=۶\cos ۲\left(\frac{\pi}{۶}\right)=۶\times\frac{۱}{۲}=۳$

ب)

$$f''\left(\frac{\pi}{۲}\right)-f'\left(\frac{\pi}{۲}\right)=۶\cos\left(۲\times\frac{\pi}{۲}\right)-۳\sin\left(۲\times\frac{\pi}{۲}\right)=۶\cos\pi-۳\sin\pi=۶(-۱)-۳(۰)=-۶$$

۱۴

$$f(x)=|x-۲|,\ g(x)=\begin{cases} x^۲ & x<۲ \\ x+۲ & x\geq ۲ \end{cases}$$

۱۵

$$f'_{+}(۳) = \lim_{x\to ۳^{+}} \frac{|x^{۲}-۹|}{x-۳} = \lim_{x\to ۳^{+}} \frac{|(x-۳)(x+۳)|}{x-۳} = \lim_{x\to ۳^{+}} \frac{\cancel{(x-۳)}(x+۳)}{\cancel{(x-۳)}} = (۳+۳) = ۶$$

$$f'_{-}(۳) = \lim_{x\to ۳^{-}} \frac{|x^{۲}-۹|}{x-۳} = \lim_{x\to ۳^{-}} \frac{|(x-۳)(x+۳)|}{x-۳} = \lim_{x\to ۳^{-}} \frac{-\cancel{(x-۳)}(x+۳)}{\cancel{(x-۳)}} = -(۳+۳) = -۶$$

معادله نیم‌مماس راست : $y - y_{۰} = m(x - x_{۰}) \Rightarrow y - ۰ = ۶(x-۳) \Rightarrow y = ۶x - ۱۸$

معادله نیم‌مماس چپ : $y - ۰ = -۶(x-۳) \Rightarrow y = -۶x + ۱۸$

۱۶

$$y = \begin{cases} ۱ & x \le ۱ \\ \frac{۱}{x} & x > ۱ \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} ۰ & x < ۱ \\ \frac{-۱}{x^{۲}} & x > ۱ \end{cases} \Rightarrow y'_{-}(۱) \neq y'_{+}(۱)$$

تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

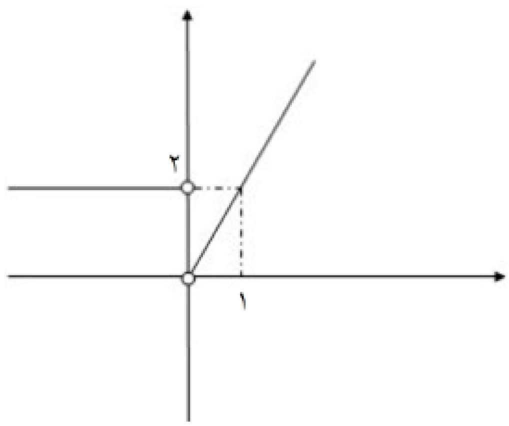
۱۷ الف) $\quad$ ۲) $-\infty$ $\quad$ ۱) ۲

ب) تابع در $x = -۱, x = ۱$ مشتق‌پذیر نیست.

۱۸ الف) تابع f در صفر پیوسته نیست. بنابراین $f'(۰)$ موجود نیست.

ب) $f'(x) = \begin{cases} ۲x & x > ۰ \\ ۲ & x < ۰ \end{cases}$

پ)



۱۹ کافی است نشان دهیم $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

$$\lim_{x\to a}(f(x) - f(a)) = \underbrace{\lim_{x\to a}(x-a)\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{\lim_{x\to a}(x-a) \times \lim_{x\to a}\frac{(f(x)-f(a))}{x-a}}_{(۰/۲۵)}$$

$$= ۰ \times f'(a) = ۰ \ (۰/۲۵) \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) - f(a) = ۰ \ (۰/۲۵) \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \ (۰/۲۵)$$

$$f'(x)=\begin{cases} ۲x+۲ : x>۱ \\ ۲ \quad : ۰<x<۱ \\ ۱ \quad : x<۰ \end{cases}$$

در نقاط $x=۰$ و $x=۱$ پیوسته نیست، پس مشتق‌پذیر هم نیست و $D_{f'}=R-\{۰,۱\}$

رسم نمودار f : $f(x)=\begin{cases} x^۲+۲x : x\geq ۱ \\ ۲x \quad : ۰\leq x<۱ \\ x+۱ : x<۰ \end{cases}$

x	۱	۲
y	۳	۸

x	۰	۱
y	۰	۲

x	-۱	۰
y	۰	+۱