۱ $\lim\limits_{x\to ۲^+}\dfrac{ax-۳}{(۲-x)^۳}=\dfrac{۲a-۳}{۰^-}=+\infty\Rightarrow ۲a-۳<۰\Rightarrow a<\dfrac{۳}{۲}$ (ص ۵۳)

۲ الف)

ب) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to -۱^+} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -۱^-} f(x)=+\infty\end{cases}$

۳ الف) $\lim\limits_{x\to ۵}\dfrac{(۲-\sqrt{x-۱})(۲+\sqrt{x-۱})}{۲(x-۵)(۲+\sqrt{x-۱})}=\lim\limits_{x\to ۵}\dfrac{-(x-۵)}{۲(x-۵)(۲+\sqrt{x-۱})}=\dfrac{-۱}{۸}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳^-}\dfrac{-۱}{x-۳}=\dfrac{-۱}{۰^-}=+\infty$

۴ $x=-\dfrac{b}{۲a}=-\dfrac{b}{۲}=-۱\Rightarrow b=۲$

$(-۱)^۲-۲+c=۰\Rightarrow c=۱$

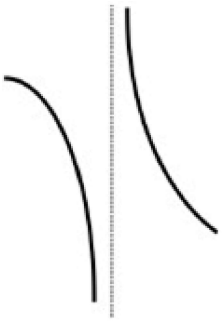
۵ الف) $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{۲-\sqrt{x}}{x^۲-۱۶}=\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{۲-\sqrt{x}}{(x-۴)(x+۴)}\times\dfrac{۲+\sqrt{x}}{۲+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{۴-x}{(x-۴)(x+۴)(۲+\sqrt{x})}$

$=\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{-۱}{(x+۴)(۲+\sqrt{x})}=\dfrac{-۱}{۳۲}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{۱}{۱-\cos x}=\dfrac{۱}{۱-۱^-}=\dfrac{۱}{۰^+}=+\infty$

۶ الف) $\lim\limits_{x\to -۱}\dfrac{(x-۱)(x+۱)(x-\sqrt{۲x+۳})}{x^۲-۲x-۳}=\lim\limits_{x\to -۱}\dfrac{(x-۱)(x+۱)(x-\sqrt{۲x+۳})}{(x+۱)(x-۳)}=-۱$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{۲}{|x-۳|}=\dfrac{۲}{۰^+}=+\infty$

۷ 

$x(x^۲+۱)=۰\Rightarrow x=۰$

$\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{x+۱}{x^۳+x}=+\infty\,,\ \lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{x+۱}{x^۳+x}=-\infty$

۸ الف) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}}\dfrac{(x)(۲x-۱)}{(۲x+۱)(۲x-۱)}=\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}}\dfrac{(x)}{(۲x+۱)}=\dfrac{۱}{۴}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{x+۱}{\sin^۲ x}=\dfrac{۱}{۰^+}=+\infty$

۹

الف) $x \to ۱^- \Rightarrow x < ۱ \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{۱}{x} > ۱ \xrightarrow{\times \pi} \frac{\pi}{x} > \pi$

$$\lim_{x \to ۱^-} \text{Cotg}\left(\frac{\pi}{x}\right) = \lim_{x \to ۱^-} \frac{\text{Cos}\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\text{Sin}\left(\frac{\pi}{x}\right)} = \frac{\text{Cos}(\pi^+)}{\text{Sin}(\pi^+)} = \frac{-۱}{۰^-} = +\infty$$

ب) $$\lim_{x \to ۰^+} x\left[\frac{۱}{x}\right] = \lim_{x \to ۰^+} x \times \frac{۱}{x} = ۱$$

۱۰

الف) $$\lim_{x \to \pi^+} \frac{[\text{Sin}\, x]}{\text{Sin}\, x} = \frac{[۰^-]}{۰^-} = \frac{-۱}{۰^-} = +\infty$$

ب) $x \to \frac{۵\pi^+}{۸} \Rightarrow x > \frac{۵\pi}{۸} \xrightarrow{\times(-۱)} -x < -\frac{۵\pi}{۸} \xrightarrow{+\frac{\pi}{۸}} \frac{\pi}{۸} - x < -\frac{\pi}{۲}$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \frac{۵\pi}{۸}^+} \overbrace{\text{tg}\left(\frac{\pi}{۸} - x\right)}^{\left(-\frac{\pi}{۲}\right)^-} = \lim_{x \to \frac{۵\pi}{۸}^+} \frac{\text{Sin}\left(\frac{\pi}{۸} - x\right)}{\text{Cos}\left(\frac{\pi}{۸} - x\right)} = \frac{-۱}{۰^-} = +\infty$$

۱۱ برای یافتن مجانب قائم باید حد تابع برای x میل کند به ریشه‌ی مخرج بی‌نهایت شود.

$$x^۲ - ۱۶ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۴ \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to ۴} \frac{x^۲ - ۵x + ۴}{x^۲ - ۱۶} = \lim_{x \to} \frac{(x-۱)\cancel{(x-۴)}}{\cancel{(x-۴)}(x+۴)} = \frac{۳}{۸} \\ \lim_{x \to -۴} \frac{x^۲ - ۵x + ۴}{x^۲ - ۱۶} = +\infty \end{cases}$$

بنابراین فقط $x = -۴$ مجانب قائم تابع است.

۱۲ چون حاصل حد برای راست و چپ یکسان شده است. بنابراین باید مخرج مربع کامل باشد در نتیجه داریم:

$$x = ۵ \Rightarrow x - ۵ = ۰ \xrightarrow{\text{به توان می رسانیم ۲}} x^۲ - ۱۰x + ۲۵ = ۰ \xrightarrow{\times ۲}$$

$$۲x^۲ - ۲۰x + ۵۰ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} b = -۲۰ \\ a - ۱ = ۵۰ \Rightarrow a = ۵۱ \end{cases}$$

۱۳

الف) $$\lim_{x \to ۴^+} \frac{x + ۷}{۴ - x} = \frac{۱۱}{۰^-} = -\infty$$

ب) $$\lim_{x \to ۳^-} \frac{x + ۱۱}{|x - ۳|} = \frac{۱۴}{۰^+} = +\infty$$

۱۴ برای یافتن مجانب قائم باید حد تابع برای x میل کند به ریشه‌ی مخرج بی‌نهایت شود.

$$x^۲-۴=۰\Rightarrow x=\pm ۲\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{\left[\frac{x}{۵}\right]}{x^۲-۴}=\dfrac{۰(\text{صفر مطلق})}{۰(\text{صفر حدی})}=۰ \\ \lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{\left[\frac{x}{۵}\right]}{x^۲-۴}=\dfrac{-۱}{۰(\text{صفر حدی})}=\pm\infty \end{cases}$$

بنابراین فقط $x=-۲$ مجانب قائم تابع است.

۱۵

الف) $\lim\limits_{x\to \pi^-}\dfrac{۱}{\sin x}=\dfrac{۱}{۰^+}=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to \pi^+}\cot g\, x=\lim\limits_{x\to \pi^+}\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{-۱}{۰^-}=+\infty$

۱۶

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{x+۱۰}{۲-f(x)}=\frac{۱۲}{۰^+}=+\infty$$

۱۷ شکل الف

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{x}{x^۲-۲x+۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x}{(x-۱)^۲}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to ۱^-}\frac{x}{x^۲-۲x+۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{x}{(x-۱)^۲}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

۱۸

الف) $\lim\limits_{x\to ۰}\sqrt{۳+x^۲}=\sqrt{۳}$, $\lim\limits_{x\to ۰}x^۲=۰^+$ $\xrightarrow{\text{طبق قضیه ۳}}\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sqrt{۳+x^۲}}{x^۲}=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲}(۱)=۱$, $\lim\limits_{x\to ۲}(x-۲)^۴=۰^+$ $\xrightarrow{\text{طبق قضیه ۳}}\lim\dfrac{۱}{(x-۲)^۴}=+\infty$

پ) $\lim\limits_{x\to(-۲)}|۵-x|=۷$, $\lim\limits_{x\to(-۲)}|۲+x|=۰^+$ $\xrightarrow{\text{طبق قضیه ۳}}\lim\left|\dfrac{۵-x}{۲+x}\right|=+\infty$

۱۹

الف)
$$\lim_{x\to ۳}\frac{۵-\sqrt{۸x+۱}}{x^۲-۱۰x+۲۱}\times\frac{۵+\sqrt{۸x+۱}}{۵+\sqrt{۸x+۱}}=\lim_{x\to ۳}\frac{۲۵-۸x-۱}{(x^۲-۱۰x+۲۱)(۵+\sqrt{۸x+۱})}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{-۸\cancel{(x-۳)}}{\cancel{(x-۳)}(x-۷)(۵+\sqrt{۸x+۱})}=\frac{-۸}{-۴\times(۵+۵)}=\frac{۲}{۱۰}=\frac{۱}{۵}$$

ب) $\lim\limits_{x\to ۵^-}\dfrac{[x]-۵}{x-۵}=\dfrac{۴-۵}{۰^-}=\dfrac{-۱}{۰^-}=+\infty$

٢٠